TD 31

Groupes symétriques

Exercice 31.1 (★ - Premiers calculs)

On considère les permutations suivantes de $\mathfrak{S}_{12}$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 6 & 8 & 7 & 10 & 12 & 1 & 2 & 9 & 5 & 11 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 1 & 5 & 12 & 2 & 11 & 8 & 4 & 10 & 9 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\sigma \circ \tau$, $\tau \circ \sigma$, σ^{-1}, τ^{-1}.
2. Décomposer σ et τ en produit de cycles disjoints, puis en produit de transpositions, et calculer leur signature.

Exercice 31.2 (★★ - Calculs de puissance)

Expliciter les puissances suivantes sous la forme d'un produit de cycles à supports disjoints :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}^{47}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}^{168}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 7 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}^{227}.$$

Exercice 31.3 (★★)

Décrire les éléments du groupe alterné $\mathfrak{A}_4$, écrire la table de ce groupe et déterminer tous ses sous-groupes.

Exercice 31.4 (★★★ - Classes de conjugaisons dans $\mathfrak{S}_n$ - ✍)

1. Soit G un groupe. On dit que deux éléments g_1 et g_2 de G sont *conjugués* s'il existe $h \in G$ tel que $g_2 = hg_1h^{-1}$. Montrer que la relation de conjugaison est une relation d'équivalence sur G.
2. On souhaite caractériser les classes de conjugaisons du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.
   (a) Montrer que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\sigma \circ (a_1\ a_2\ \dots\ a_p) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\ \sigma(a_2)\ \dots\ \sigma(a_p))$.
   (b) En déduire que si γ et γ' sont des cycles de même longueur, alors il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\gamma' = \sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1}$.
   (c) Soient τ et τ' deux permutations, $\tau = \gamma_1 \circ \cdots \circ \gamma_r$, $\tau' = \gamma'_1 \circ \cdots \circ \gamma'_s$ leur décomposition en produit de cycles à supports disjoints, où l'on inclut les cycles de longueur 1 et on suppose les cycles rangés dans l'ordre croissant de leur longueur :
   $$\ell(\gamma_1) \leq \cdots \leq \ell(\gamma_r)$$
   et de même pour τ'. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) τ et τ' sont conjugués ;
   (ii) $r = s$ et pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\ell(\gamma_i) = \ell(\gamma'_i)$.

   Ainsi, les classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$ sont paramétrées par les *partitions de* n, c'est-à-dire les suites de la forme $(i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_r)$ telles que $n = i_1 + \cdots + i_r$.

3. (a) Les permutations $\tau = (1\ 2\ 4) \circ (2\ 5) \circ (1\ 6)$, $\tau' = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ et $\tau'' = (1\ 3\ 2) \circ (4\ 5\ 6)$ de $\mathfrak{S}_6$ sont-elles conjuguées ?
   (b) Déterminer les classes de conjugaison des groupes symétriques $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{S}_5$.

Exercice 31.5 (★★ - D'autres générateurs du groupe symétrique - ✍)

1. Soient $1 \leq i < j \leq n$. Notons $c = \begin{pmatrix} i & i+1 & \cdots & j-1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $\begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} = c \circ \begin{pmatrix} j-1 & j \end{pmatrix} \circ c^{-1}$.
   (b) En déduire que les transpositions $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} n-1 & n \end{pmatrix}$ engendrent $\mathfrak{S}_n$.
2. Supposons $n \geq 3$. Notons $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$ la permutation circulaire de $\mathfrak{S}_n$ et $\tau = (1\ 2)$.
   (a) Expliciter $\gamma^p \circ \tau \circ \gamma^{-p}$ pour tout $p = 0, \dots, n-1$.
   (b) En déduire que γ et τ engendrent $\mathfrak{S}_n$.
3. Existe-t-il une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ qui engendre $\mathfrak{S}_n$?

Exercice 31.6 (★★★ - Théorème de Cayley)

Soit G un groupe fini d'ordre n.

1. Montrer que pour tout $g \in G$, l'application
$$\varphi_g : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \rightarrow & G \\ h & \mapsto & g \cdot h \end{array} \right.$$
appartient à $\mathfrak{S}_G$.
2. En déduire qu'il existe un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ isomorphe à G.

Exercice 31.7 (★★★★ - Unicité du morphisme signature)

Déterminer tous les morphismes de groupes non triviaux (c'est-à-dire différents du morphisme constant égal à 1) de $\mathfrak{S}_n$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$.
