

Couples de variables aléatoires finies

Indépendance

Exercice 32.1 (★★)

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une variable aléatoire X sur (Ω, P) soit indépendante de toute variable aléatoire sur (Ω, P) .

Exercice 32.2 (★★ - Une caractérisation algébrique de l'indépendance)

Soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω . On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_p\}$ (où les x_i et les y_i sont deux à deux distincts). Pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, on note $m_{i,j} = P([X = x_i] \cap [Y = y_j])$.

Montrer que X et Y sont indépendantes si, et seulement si, la matrice $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est de rang 1.

Couples et vecteurs aléatoires

Exercice 32.3 (★★)

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n . L'urne k contient k boules numérotées de 1 à k . On choisit une des urnes au hasard et on note X la variable aléatoire correspondant au numéro de l'urne choisie. Si $X = k$, on tire au hasard une boule dans l'urne k et on note Y la variable aléatoire correspondant au numéro de la boule choisie.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) .
2. En déduire la loi de Y sous forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à calculer.
3. Calculer $E(Y)$.

Exercice 32.4 (★★★)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On procède à deux tirages successifs d'une boule selon le processus suivant : au premier tirage, on tire au hasard une boule de l'urne. Si on a, par exemple, obtenu la boule numéro i , on la remet dans l'urne et toutes les boules portant un numéro strictement inférieur à i sont remplacées par un nombre égal de boules portant le numéro i . On procède alors au deuxième tirage. Soient X et Y les variables aléatoires égales aux numéros obtenus respectivement lors du premier et du second tirage.

1. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X = i)$.
2. En déduire la loi marginale de Y , puis son espérance.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 32.5 (★)

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivant toutes les deux la même loi binomiale de paramètres n et p .

1. Donner la loi de $X + Y$.
2. Calculer $P(X + Y = n)$ de deux façons différentes.

3. En déduire que $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

Exercice 32.6 (★★★ - Somme de lois uniformes)

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes suivant la même loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. (a) Montrer que : $\forall k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket, P(X+Y=k) = \frac{k-1}{n^2}$.
 (b) Montrer que : $\forall k \in \llbracket n+2, 2n \rrbracket, P(X+Y=k) = \frac{2n-k+1}{n^2}$.
2. (a) Montrer que $P(X+Y=Z) = \frac{n-1}{2n^2}$.
 (b) Montrer que la variable aléatoire $T = n+1-Z$ suit la loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.
 (c) En déduire la probabilité $P(X+Y+Z = n+1)$.

Exercice 32.7 (★★)

Soit $n \geq 1$. On considère X_0, \dots, X_n, N des variables aléatoires mutuellement indépendantes sur un espace probabilisé (Ω, P) , telles que X_0, \dots, X_n suivent la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ et N suit la loi binomiale de paramètres n et $p \in]0, 1[$.

1. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Déterminer la loi de $M_k = \min(X_0, \dots, X_k)$.
2. Déterminer la loi de $M = \min(X_0, \dots, X_N)$.

Exercice 32.8 (★★)

Soient X et Y des variables indépendantes sur (Ω, P) , suivant toutes deux la loi uniforme sur $\llbracket -n, n \rrbracket$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$. Déterminer la probabilité que M soit inversible.

Exercice 32.9 (★★★)

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On considère X_1, \dots, X_n des variables aléatoires mutuellement

indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $U = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et $M = UU^\top$.

1. Déterminer la loi de probabilité de $\text{tr}(M)$ et de $\text{rg}(M)$.
2. Quelle est la probabilité que M soit une matrice de projection ?
3. Soit $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $S = V^\top M V$. Déterminer $E(S)$ et $V(S)$.

Covariance**Exercice 32.10 (★ - )**

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de Bernoulli.

1. Montrer que : $\text{Cov}(X, Y) = P([X=1] \cap [Y=1]) - P([X=1])P([Y=1])$.
2. Montrer que deux variables de Bernoulli sont indépendantes si, et seulement si, elles sont non corrélées.

Exercice 32.11 (★)

Soit un couple (X, Y) de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par :

$X \setminus Y$	b_1	b_2	b_3
a_1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
a_2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	α

où $a_i \neq a_j$ et $b_i \neq b_j$ si $i \neq j$.

1. Que vaut α ? Déterminer les lois marginales de X et de Y .
 2. Montrer que $\text{Cov}(X, Y) = \frac{(a_2 - a_1)(2b_1 - b_2 - b_3)}{25}$.
 3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
-

Exercice 32.12 (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'une pièce dont la probabilité de faire "pile" est $p \in]0, 1[$ et de $(n + 1)$ urnes numérotées de 0 à n . Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, l'urne numéro k contient k boules vertes et $(n - k)$ boules rouges.

On considère l'expérience suivante : on lance n fois la pièce, puis on pioche une boule dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de fois où "pile" a été obtenu.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de "piles" obtenues lors des n lancers et Y la variable aléatoire qui vaut 1 si l'on tire une boule verte et 0 sinon.

1. Reconnaître la loi de X . Donner $E(X)$, $V(X)$ et $E(X^2)$.
 2. (a) Calculer $P_{(X=0)}(Y = 0)$ et $P_{(X=n)}(Y = 0)$. X et Y sont-elles indépendantes ?
 (b) Déterminer, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P_{(X=k)}(Y = 1)$.
 (c) En déduire que $P(Y = 1) = \frac{E(X)}{n}$.
 (d) Donner la loi de Y et son espérance.
 3. (a) Montrer que $E(XY) = \frac{E(X^2)}{n}$.
 (b) En déduire la covariance du couple (X, Y) .
-

Exercice 32.13 (★★)

Soient $p \in]0, 1[$ et $n > 2$. On considère n joueurs de basket-ball qui tirent chacun deux lancers francs. On considère qu'à chaque lancer, un joueur a une probabilité p de marquer, et que les deux lancers sont indépendants. On note X la variable aléatoire égale au nombre de joueurs ayant marqué leur premier lancer franc, et Z la variable aléatoire égale au nombre de joueurs ayant marqué au moins un lancer franc.

1. Déterminer la loi de X .
 2. Montrer que Z suit une loi binomiale, donner son espérance et sa variance.
 3. On pose $Y = Z - X$. Que représente la variable aléatoire Y ? Déterminer sa loi.
 4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer $\text{Cov}(X, Y)$.
-

Exercice 32.14 (★★★)

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variable aléatoire de Bernoulli mutuellement indépendantes et de même paramètre p . Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_i = X_i X_{i+1}$.

1. Déterminer la loi de Y_i .
 2. Pour tout $i \neq j$, étudier l'indépendance de Y_i et Y_j .
 3. Soit $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. Calculer l'espérance et la variance de S_n .
-

Exercice 32.15 (★★)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

1. Déterminer la loi de $S = \max(X, Y)$, puis calculer $E(S)$.
 2. En déduire l'espérance de $T = \min(X, Y)$.
 3. Les variables aléatoires S et T sont-elles indépendantes ?
 4. Calculer l'espérance de ST , puis la covariance de S et T .
-

Exercice 32.16 (★★★★ - Loi trinomiale)

Soit $n \geq 2$, et soient $p, q \in]0, 1[$ tels que $p + q < 1$.

1. Montrer qu'on définit bien une loi conjointe en posant pour tout $(k, \ell) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$:

$$P([X = k] \cap [Y = \ell]) = \binom{n}{k} \binom{n-k}{\ell} p^k q^\ell (1-p-q)^{n-k-\ell}.$$

Dans la suite, (X, Y) est un couple de variables dont la loi conjointe est donnée ci-dessus.

2. Déterminer les lois de X et Y . Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
 3. Déterminer la loi de $Z = n - X - Y$. En déduire $V(X + Y)$, puis $\text{Cov}(X, Y)$.
-

Inégalités de concentration**Exercice 32.17 (★★)**

On jette 3600 fois un dé équilibré à 6 faces. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du numéro 1 soit compris entre 480 et 720.

Exercice 32.18 (★★★)

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On considère une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres $4n$ et $1/2$.

1. Majorer $P(X \geq 3n)$ à l'aide de l'inégalité de Markov. Commenter.
 2. Obtenir une meilleure majoration à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev. Commenter.
 3. Obtenir une autre majoration, en appliquant l'inégalité de Markov à la variable aléatoire 2^X . Quelle est la meilleure ?
-