TD 33

Déterminants

Formes multilinéaires

Exercice 33.1 (★)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\varphi : (X,Y) \mapsto X^\top AY$ est une forme bilinéaire sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Prouver qu'elle est alternée si A est antisymétrique.

Exercice 33.2 (★★★)

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit également $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$:

$$\sum_{j=1}^{n} \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_{j-1}, f(x_j), x_{j+1}, \dots, x_n) = \operatorname{tr}(f) \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

Déterminants théoriques

Exercice 33.3 (★★ - Formules de Cramer - ✍)

1. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, de sorte que pour $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ possède une unique solution, que l'on notera $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note A_i la matrice dont toutes les colonnes sont celles de A, sauf la i-ème, qui est égale à B.

   Prouver que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$.

2. **Application.** Soient $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ avec a, b, c deux à deux distincts. Résoudre le système $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$.

Exercice 33.4 (★★★)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, dont les colonnes sont notées $A_1, \dots, A_n$. Considérons $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont les colonnes $B_1, \dots, B_n$, sont définies pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ par :

$$B_j = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} A_k = S - A_j \quad \text{où} \quad S = \sum_{i=1}^{n} A_i.$$

1. Montrer que $\det(B) = (n-1)(-1)^{n-1} \det(A)$.

2. En déduire le calcul du déterminant de la matrice suivante (où $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$) :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & 0 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_n & \cdots & \cdots & a_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$

Exercice 33.5 (★★★)
Soit $M = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que si les coefficients diagonaux de M sont impairs et les coefficients hors diagonale sont pairs, alors M est inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 33.6 (★★★★ - Oral X PC 2025)
Déterminer toutes les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$\forall B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(A+B) = \det(A) + \det(B).$$

Exercice 33.7 (★★★★ - Deux matrices semblables sur $\mathbb{C}$ le sont sur $\mathbb{R}$ - ✍)
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, semblables en tant que matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire telles qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$. On note $P = P_1 + iP_2$ avec $P_1, P_2 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

En considérant l'application $t \mapsto \det(P_1 + tP_2)$, prouver que A et B sont semblables sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Calculs de déterminants

Exercice 33.8 (★)
Donner, sous une forme la plus factorisée possible, la valeur des déterminants suivants, où $a, b, c, d \in \mathbb{K}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}.$$

Exercice 33.9 (★★)
Calculer par récurrence les déterminants suivants où $a, b, c \in \mathbb{K}$ et $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$:

$$A_p = \begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{p-1} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+1}{p-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \binom{n+p-1}{1} & \cdots & \binom{n+p-1}{p-1} \end{vmatrix}_{[p]} \qquad B_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & \ddots & & & \iddots & 0 \\ \vdots & & a & b & & \vdots \\ \vdots & & b & a & & \vdots \\ 0 & \iddots & & & \ddots & 0 \\ b & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_{[2n]} \qquad C_n = \begin{vmatrix} a & c & & (0) \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c \\ (0) & & b & a \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Exercice 33.10 (★)
1. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}_n[X])$ définie par $f(P) = P - P'$. Calculer $\det(f)$.

2. Soit $g \in \mathscr{L}(\mathbb{K}_n[X])$ définie par $g(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}$.

   (a) Calculer $g \circ f(P)$ pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$.

   (b) En déduire $\det(g)$.

3. Retrouver la valeur de $\det(g)$ en écrivant la matrice de g dans la base canonique.

Exercice 33.11 (★★)
Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varphi_A \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))$ définie par $\varphi_A(M) = AM$. Calculer la trace et le déterminant de φ_A.

Exercice 33.12 (★★)
Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{C}$ la famille

$$((8,-1,2-\lambda),(5,1-\lambda,1),(2+\lambda,-2,1))$$

est-elle une base de $\mathbb{C}^3$?

Exercice 33.13 (★★★)
Soient $z_0, \dots, z_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.
Montrer que $((X-z_0)^n, \dots, (X-z_n)^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 33.14 (★★★ - Déterminants de Hurwitz)
Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq b$, et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $H_n(X) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + X & a+X & \dots & a+X \\ b+X & \lambda_2+X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+X \\ b+X & \dots & b+X & \lambda_n+X \end{vmatrix}$ est un polynôme de degré au plus 1 :
2. Calculer $D_n = \begin{vmatrix} \lambda_1 & a & \dots & a \\ b & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & \lambda_n \end{vmatrix}$. En déduire $\Delta_n = \begin{vmatrix} \lambda_1 & a & \dots & a \\ a & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & \lambda_n \end{vmatrix}$.

Exercice 33.15 (★★★★ - Déterminant et polynômes de Tchebychev)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos(x)) = \cos(nx).$$
Préciser le degré et le coefficient dominant de T_n.
2. Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Calculer le déterminant :
$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a_0) & \cos(2a_0) & \dots & \cos(na_0) \\ 1 & \cos(a_1) & \cos(2a_1) & \dots & \cos(na_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos(a_n) & \cos(2a_n) & \dots & \cos(na_n) \end{vmatrix}.$$
On pourra effectuer des opérations sur les colonnes pour se ramener à un déterminant de Vandermonde.

Applications du déterminant

Exercice 33.16 (★)

1. Montrer que $H = \text{Vect}((1,0,0,1),(1,1,-1,2),(1,0,3,-1))$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une équation cartésienne dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^4$.

2. Donner un système d'équations cartésiennes dans $\mathscr{B}$ de $F = \text{Vect}((1,1,1,1),(1,-1,1,-1))$.

Exercice 33.17 (★★★)

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$.

1. Justifier que $\det(A) \in \mathbb{Z}$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible et que $A^{-1} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$.

Exercice 33.18 (★★★★ - Rang et déterminant de la comatrice)

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer $\text{rg}(\text{Com}(A))$ en fonction de $\text{rg}(A)$.

2. Déterminer une expression de $\det(\text{Com}(A))$ en fonction de $\det(A)$.

Exercice 33.19 (★★★★)

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent. On souhaite prouver que $\text{Com}(A)$ et $\text{Com}(B)$ commutent.

1. Prouver le résultat si A et B sont inversibles.

2. Prouver que $f : t \mapsto \det(A + tI_n)$ est une fonction polynomiale. En déduire que pour $p \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand, $A + \dfrac{1}{p}I_n$ et $B + \dfrac{1}{p}I_n$ sont inversibles. Conclure.
