TD 4

Rappels et compléments sur les fonctions

Généralités sur les fonctions

Exercice 4.1 (★★ - ✍)

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant votre affirmation :

1. la somme de deux fonctions croissantes est croissante.
2. la somme de deux fonctions monotones est monotone.
3. le produit de deux fonctions monotones est monotone.
4. si f est paire, alors $g \circ f$ est paire.
5. si f est impaire et g est paire, alors $g \circ f$ est paire.
6. si f est paire, alors f' est paire.
7. si f est périodique, alors $g \circ f$ est périodique.
8. si g est périodique, alors $g \circ f$ est périodique.
9. si g est bornée, alors $g \circ f$ est bornée.
10. si $g \circ f$ est bornée, alors g est bornée.
11. le produit de deux fonctions majorées est majoré.
12. le produit de deux fonctions bornées est borné.

Exercice 4.2 (★★)

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Montrer que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f_k : x \mapsto \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor - \frac{\lfloor x \rfloor}{k}$ est k-périodique.
2. (a) Que dire d'une fonction périodique et croissante ?
   (b) D'une fonction périodique et strictement croissante ?

Exercice 4.3 (★★★)

Dans tout l'exercice, on se place dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Justifier que la symétrie par rapport à la droite (verticale) d'équation $x = \frac{a}{2}$ envoie un point de coordonnées (x, y) sur le point de coordonnées $(a - x, y)$.
2. Soit $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in [0, a]$, $f(x) = f(a - x)$. Justifier alors que $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{a}{2}$.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)\left|2\cos^2(x) - 1\right|$.
   (a) Justifier qu'il suffit d'étudier f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
   (b) (★) Tracer le graphe de f sur $[-\pi, 2\pi]$.

Exercice 4.4 (★★★★)

Soit $a > 0$, et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x + a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}$.
Prouver que f est périodique.

Exercice 4.5 (Une équation fonctionnelle (Oral Polytechnique) - ★★★★★)
Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ qui tendent vers 0 en $+\infty$ et telles que pour tous réels strictement positifs x et y : $f(xf(y)) = yf(x) \quad (\mathscr{R})$.

1. Montrer que $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ est solution du problème posé.
2. Prouver que si f est une fonction satisfaisant aux conditions de l'énoncé, alors le seul éventuel point fixe de f (c'est-à-dire la seule solution éventuelle de l'équation $f(x) = x$) est 1 .
3. En déduire que g est la seule solution au problème posé.

Limites

Exercice 4.6 (★★)
Déterminer les limites de :

$f_1 : \quad x \mapsto \dfrac{1-5x}{5+x}$ en -5, $+\infty$ et $-\infty$;

$f_2 : \quad x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{1+x}}$ en $+\infty$ et $-\infty$;

$f_3 : \quad x \mapsto \dfrac{3x^2-x-2}{x^4-1}$ en 1, $+\infty$ et $-\infty$;

$f_4 : \quad x \mapsto \sqrt{x^2-4x+1}-x+2$ en $+\infty$;

$f_5 : \quad x \mapsto \sqrt{x^2-4x+9}+x-3$ en $-\infty$.

Exercice 4.7 (★★)

1. Calculer la limite en 1 de $x \mapsto \dfrac{\sin(\pi x)}{x-1}$
2. Calculer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

   (a) $x \mapsto x \sin\left(\dfrac{3}{x}\right)$;

   (b) $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}$.
3. Calculer les limites en 0 des fonctions suivantes :

   (a) $x \mapsto \dfrac{\ln(1+\sin(x))}{x}$;

   (b) $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$;

   (c) $x \mapsto \dfrac{e^{2x}-e^{-x}}{x}$.

Dérivées

Exercice 4.8 (★)
Étudier le domaine de définition, de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$f_1 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} \qquad f_2 : x \mapsto \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}} \qquad f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{(\cos(x)+1)^4} \qquad f_4 : x \mapsto \sin\left(\ln\left(\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}+3}\right)\right)$

Exercice 4.9 (★★)
Pour $m \in \mathbb{R}$, on pose $f_m(x) = \dfrac{x+m}{x^2+1}$. On note $\mathscr{C}_m$ la courbe représentative de f_m.

1. Montrer que les tangentes aux courbes $\mathscr{C}_m$ au point d'abscisse 0 sont parallèles.
2. Montrer que les tangentes aux courbes $\mathscr{C}_m$ au point d'abscisse 1 sont concourantes.

Exercice 4.10 (★★ - ✍)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^n$. Calculer $f^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Plus généralement, si f est une fonction polynomiale de degré n, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:
   - si $k \leq n$, $f^{(k)}$ est polynomiale de degré $n-k$;
   - si $k \geq n+1$, $f^{(k)}$ est la fonction nulle.

Exercice 4.11 (★★★)

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer sa dérivée n-ème pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$f_1 : \quad x \mapsto e^{ax+b}$, $a \neq 0$; | $f_2 : \quad x \mapsto \dfrac{2}{1+3x}$; | $f_3 : \quad x \mapsto \sin(x)$.

Étude de fonctions et inégalités

Exercice 4.12 (★★)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \left(2x+1+\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$.

1. Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. Étudier la dérivabilité de ce prolongement.
2. Déterminer les asymptotes au graphe de f.

Exercice 4.13 (★★)

Étudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{2-2x}{3+x^2}}$.
Est-elle bornée ? Possède t-elle des extrema sur son ensemble de définition?

Exercice 4.14 (★★)

1. Montrer que, pour x et y strictement positifs : $\quad x\ln x + y\ln y \leq (x+y)\ln(x+y)$.
2. Montrer que pour tout $x, y \in]-1,1[$: $\quad \dfrac{x-y}{1+xy} \in]-1,1[$.

Exercice 4.15 (★★)

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

1. Prouver l'inégalité $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ pour tout nombre positif x.
2. Encadrer $\ln(u_n)$, puis déduire les limites de $\ln(u_n)$ et de u_n.

Bijections

Exercice 4.16 (★)

1. Montrer que la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x+1}{x-3} \end{array} \right.$ réalise une bijection de $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ sur un ensemble à préciser.
2. Déterminer alors f^{-1}.

Exercice 4.17 (★★)

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J\setminus\{1\}$ et que pour tout $x \in J\setminus\{1\}$, $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Exercice 4.18 (★★)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}$ de f et étudier sa parité.
2. Étudier les variations de la fonction f et préciser ses limites aux bornes de $\mathscr{D}$.
3. Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[0, +\infty[$ admet une application réciproque qu'on notera g.
4. Donner le domaine de définition de g, son domaine de continuité ainsi que son sens de variation.
5. Tracer les courbes représentatives des fonctions f et g.
6. Expliciter la fonction g.

Exercice 4.19 (★★★)

Soit $a > 0$, soit I une partie de $\mathbb{R}$, et soit $f :]-a, a[\to I$ une fonction impaire réalisant une bijection de $]-a, a[$ sur I. Montrer que f^{-1} est encore impaire. Que dire si f est paire ?

Exercice 4.20 (★★★★)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{-x^2+8x-12}{x^2-4x+3}$.

1. Étudier la fonction f et construire sa courbe représentative.
2. Pour tout nombre réel r, on considère l'ensemble $f^{-1}(\{r\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = r\}$.
   Montrer qu'il contient en général deux éléments, et préciser les cas d'exception.
3. On considère la fonction g définie par $g(x) = \max f^{-1}(\{f(x)\})$.
   Étudier la fonction g et construire sa courbe représentative.
