TD 5

Systèmes linéaires

Systèmes linéaires

Exercice 5.1 (★)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes linéaires suivants :

$$(\mathscr{S}_1) : \begin{cases} x+y+2z=5 \\ x-y-z=1 \\ x+z=3 \end{cases}$$

$$(\mathscr{S}_2) : \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+y+2z=5 \\ x+2y+z=4 \end{cases}$$

$$(\mathscr{S}_3) : \begin{cases} x-3y+z=1 \\ 2x+y+z=-1 \\ x+11y-z=5 \end{cases}$$

$$(\mathscr{S}_4) : \begin{cases} 2x-3y+6z+2t=5 \\ y-2z+t=1 \\ z-3t=2 \end{cases}$$

$$(\mathscr{S}_5) : \begin{cases} x+y-z+t=2 \\ 2x-2y+z-2t=1 \\ -x+y+z-2t=-2 \end{cases}$$

$$(\mathscr{S}_6) : \begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x-y+z-t=-1 \end{cases}$$

$$(\mathscr{S}_7) : \begin{cases} x-2y+z+t=1 \\ 2x+y-z=2 \\ 3x-y+t=3 \\ 4x-3y+z+2t=4 \end{cases}$$

$$(\mathscr{S}_8) : \begin{cases} 3x-6y-6z+8t=2 \\ x-2y-3z+4t=0 \\ -2x+4y+4z-5t=3 \\ 6x-12y-12z+16t=4 \end{cases}$$

$$(\mathscr{S}_9) : \begin{cases} 3x+4y+z+2t=3 \\ 6x+8y+2z+6t=7 \\ 9x+12y+3z+10t=0 \end{cases}$$

$$(\mathscr{S}_{10}) : \begin{cases} x+y+2z=0 \\ 2x+5y-3z=1 \\ 3x+4y+4z=1 \\ x-2y-4z=3 \end{cases}$$

Exercice 5.2 (★★)

L'espace est rapporté à un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

1. (a) On considère les trois points $A(-1,2,1), B(1,-6,-1)$ et $C(2,2,2)$. Donner un système d'équations paramétriques du plan $\mathscr{P}$ défini par les points A,B,C, puis une équation cartésienne de $\mathscr{P}$.
   (b) Mêmes questions avec les points $A'(1,1,1)$, $B'(1,2,3)$ et $C'=(4,0,0)$.
   (c) Donner l'équation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ passant par les points $A(1,-1,1)$ et $B(2,0,0)$, puis un système d'équations cartésiennes de $\mathscr{D}$.
2. (a) Donner une écriture paramétrique du plan $\mathscr{P}$ d'équation $x-2y+z=3$
   (b) On considère la droite $\mathscr{D}$ définie par le système d'équations cartésiennes $\begin{cases} x+y-3z=-6 \\ -2x-4y+3z=-1 \end{cases}$.
   Donner une écriture paramétrique de $\mathscr{D}$.
3. On considère la droite $\mathscr{D}$ ayant pour équation paramétrique :
$$\begin{cases} x=2+t \\ y=1 \\ z=-3t \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$
   (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}'$ parallèle à $\mathscr{D}$ et passant par le point $C(1,0,-1)$.
   (b) Déterminer un système d'équations cartésiennes de $\mathscr{D}'$.
   (c) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ contenant $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

Systèmes linéaires à paramètres

Exercice 5.3 (★★)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre le système $\left\{\begin{array}{l} x+2y=0 \\ ax+3y=b \end{array}\right.$. Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

Exercice 5.4 (★★★)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants, en discutant suivant les valeurs des paramètres a et b ou m

1. $\left\{\begin{array}{l} 2x+y-3z=a \\ 3x+2y+z=a+3 \\ 7x+4y-5z=2a+5 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{l} mx+y+z+t=1 \\ x+my+z+t=m \\ x+y+mz+t=m+1 \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{l} x-my+m^2z=m \\ mx-m^2y+mz=1 \\ mx+y-m^3z=1 \end{array}\right.$

4. (★) $\left\{\begin{array}{l} x+ay+bz=0 \\ ax+y+bz=0 \\ bx+ay+z=0 \end{array}\right.$

Exercice 5.5 (★★★)

L'espace est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Discuter, suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}$, l'intersection de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $\begin{cases} mx+2y+3z=3 \\ (m-1)x+my+z=1 \end{cases}$ et du plan $\mathscr{P}$ d'équation $(m+1)x+my+(m-1)z = m-1$.

Exercice 5.6 (★★★)

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour qu'il existe une même droite contenue dans les trois plans définis par les équations suivantes :

$$\begin{array}{lcl} (P_1) & : & (1-a)x-2y+z=0 \\ (P_2) & : & 3x-(1+a)y-2z=0 \\ (P_3) & : & 3x-2y-(1+a)z=0 \end{array}$$
