TD 7

Nombres complexes

Formes algébriques et trigonométriques

Exercice 6.1 (★★)

Déterminer la forme algébrique de :

$$z_1 = \frac{e^{2i\theta}}{1-i}\ ; \qquad z_2 = (\sqrt{3}-i)^{2015}\ ; \qquad z_3 = (1+e^{i\theta})^n\ ; \qquad z_4 = \frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta},\ \theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[.$$

Exercice 6.2 (★)

Trouver les modules et arguments de :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}\ ; \qquad z_2 = 1+i\tan(\theta)\ ; \qquad z_3 = 1+i\theta \text{ où } \theta \in \left]-\pi;\pi\right[\ ; \qquad z_4 = \frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1-\cos\theta-i\sin\theta}.$$

Exercice 6.3 (★★)

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq 1$.

1. Montrer que $\left|z^3+2iz\right| \leq 3$.
2. Quels sont les z pour lesquels cette inégalité est en fait une égalité ?

Exercice 6.4 (★)

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\dfrac{1-z^n}{1-z}\right| \leq \dfrac{1-|z|^n}{1-|z|}$.

Exercice 6.5 (★★)

Pour quelles valeurs de n, le nombre complexe $\left(\dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n$ est-il un réel positif ?

Exercice 6.6 (★★★)

Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, de forme algébrique $z = a+ib, (a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Montrer que l'argument principal de z est $\theta = 2\arctan\left(\dfrac{b}{a+\sqrt{a^2+b^2}}\right)$.

Exercice 6.7 (★★)

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

(i) $e^z+1=0$;	(ii) $e^z = 1+i\sqrt{3}$;	(iii) $e^z+e^{-z}=1$.

Applications au calcul trigonométrique et algébrique

Exercice 6.8 (★★)
Linéariser $\sin^5(x)$, $\cos(x)\sin^4(x)$ et $\cos^2(2x)\sin^3(3x)$.

Exercice 6.9 (★★)
Calculer la fraction $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}$. En déduire $\tan\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

Exercice 6.10 (★)
Exprimer $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$ et en déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 6.11 (★★)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_1 = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k}$ et $S_2 = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1}$.
Indication : calculer $(1+i)^n$ de deux manières différentes.

Exercice 6.12 (★★★)
Calculer les sommes suivantes (où $n \in \mathbb{N}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$) :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb) \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(a+kb) \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a+kb) \qquad D_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^k(a)\sin(ka)$$

Racines n-èmes

Exercice 6.13 (★)
Déterminer les racines cinquièmes de j et de $\dfrac{2\sqrt{2}}{i-1}$.

Exercice 6.14 (★★)
On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{7}}$, $u = z + z^2 + z^4$ et $v = z^3 + z^5 + z^6$.

1. Calculer $u+v$, puis u^2 en fonction de u.
2. En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$.

Exercice 6.15 (★★★)
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes (où $n \geq 2$) :

$$(E_1) : \left(\tfrac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\tfrac{z-1}{z+1}\right)^n = 2\cos(n\theta) \text{ où } \theta \in \left]0, \tfrac{2\pi}{n}\right[\; ; \qquad (E_2) : z^n = \overline{z}.$$

Exercice 6.16 (★★★)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$.

2. Calculer $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. En déduire $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} (1+\omega)^n$.

Exercice 6.17 (★★★ - Banque CCINP 89)

Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 2$ et soit $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. On suppose que $k \in [\![1, n-1]\!]$. Déterminer le module et un argument du complexe $\zeta^k - 1$.
2. On pose $S = \sum_{k=1}^{n-1} \left|\zeta^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}$.

Exercice 6.18 (★★★★ - Polynômes de Tchebychev)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Prouver qu'il existe des entiers $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos^k(\theta)$.
2. Montrer que $a_n = 2^{n-1}$.
3. Soit $w = \dfrac{3-4i}{5}$. Vérifier que $w \in \mathbb{U}$, mais que $w \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{U}_n$, c'est-à-dire que w n'est pas une racine de l'unité.

Exercice 6.19 (★★★★ - Irrationalité de $\frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ (Oral ENS))

Notons $\alpha = \frac{\arccos\left(\frac{1}{3}\right)}{\pi}$. Le but de cet exercice est de prouver que α est irrationnel, i.e. $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

1. Donner la forme algébrique de $e^{i\pi\alpha}$.
2. Montrer que $\alpha \in \mathbb{Q}$ si, et seulement si, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1+2i\sqrt{2})^n = 3^n$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des entiers a_n et b_n tels que $(1+2i\sqrt{2})^n = a_n + ib_n\sqrt{2}$, et tels que $a_n - b_n$ ne soit pas divisible par 3. Conclure.

Équations polynomiales dans $\mathbb{C}$

Exercice 6.20 (★★)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(i) $(2+i)z^2 + (5-i)z + 2 - 2i = 0$;

(ii) $2z^3 - (3+4i)z^2 - (4-7i)z + 4 + 2i = 0$ sachant qu'elle admet une racine réelle ;

(iii) $z^4 + (3-6i)z^2 - 2(4+3i) = 0$;

(iv) $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$;

(v) (★) $z^2 + 2|z| - 3 = 0$.

Exercice 6.21 (★★)

1. Résoudre les systèmes $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=5 \end{cases}$ et $\begin{cases} x+y=3-2i \\ xy=5-i \end{cases}$, d'inconnues $(x,y) \in \mathbb{C}^2$.
2. Pour quelles valeurs de $\lambda > 0$ existe-t-il des rectangles pour lesquels l'aire a et le périmètre p sont reliés par la relation $p = \lambda\sqrt{a}$?

Nombres complexes et géométrie plane

Exercice 6.22 (★★)

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

(i) z, $\dfrac{1}{z}$ et $1+z$ ont le même module ;

(ii) 1, z et z^2 forment un triangle rectangle en z ;

(iii) z, $\dfrac{1}{z}$ et $-i$ sont alignés.

Exercice 6.23 (★★ - Théorème de l'angle au centre)

1. Soient a, b et c trois nombres complexes de module 1 deux à deux distincts.

   Montrer que $z = \dfrac{a(c-b)^2}{b(c-a)^2}$ est un réel positif.

2. Soient A, B et C trois points distincts appartenant à un même cercle de centre O.

   Montrer l'égalité suivante entre angles orientés $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.

Exercice 6.24 (★★★ - Concours Centrale PSI)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On note p et q ses deux racines carrées. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que les points M, P et Q d'affixes respectives z, p et q forment un triangle rectangle en M.

Exercice 6.25 (★★★)

Soient A, B, C trois points d'affixes respectives a, b et c. On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Calculer j^2 et en déduire une expression de $e^{i\frac{\pi}{3}}$ en fonction de j.
2. Montrer que ABC est équilatéral direct (c'est-à-dire avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{3}$ si, et seulement si, $a + bj + cj^2 = 0$.
3. Montrer que ABC est équilatéral si, et seulement si, $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

Exercice 6.26 (★★ - Similitudes directes)

1. Caractériser géométriquement les similitudes associées à

$$f : z \mapsto (2i+1)z - 1 \text{ et } g : z \mapsto (1 + i\sqrt{3})z - i\sqrt{3}.$$

2. Soit T la translation de vecteur $\vec{u}(-1, 0)$ et soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

   Caractériser géométriquement $T \circ R \circ T$ et $R \circ T \circ R$.

Exercice 6.27 (★★★★ - Théorème de Ménélaüs)

1. Que peut-on dire de la composée de deux rotations ? de deux translations ? de deux homothéties ? d'une homothétie et d'une translation ?

   Pour chaque composée, on identifiera la transformation obtenue et on en donnera ses éléments caractéristiques.

2. Soient ABC un triangle non aplati, et $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, $P \in (BC)$. Montrer que :

$$M, N, P \text{ alignés} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{MA}{MB} \cdot \frac{PB}{PC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1.$$

   Pour ce faire, on introduira les homothéties h_M de centre M transformant B en A, h_N de centre N transformant A en C, h_P de centre P transformant C en B, et on considèrera $f = h_P \circ h_N \circ h_M$.
