Correction de l'Interrogation du Lundi 30 Mars

Exercice 1 (Déduction naturelle)

1.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash p}(\text{ax})}{p, \neg p \vdash p}(\text{aff}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\neg p \vdash \neg p}(\text{ax})}{p, \neg p \vdash \neg p}(\text{aff})}{p, \neg p \vdash \bot}(\neg_e)}{p \vdash \neg\neg p}(\neg_i)}{\vdash p \to \neg\neg p}(\to_i)$$

2.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash p}(\text{ax})}{p \to q, p \vdash p}(\text{aff}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{p \to q \vdash p \to q}(\text{ax})}{p \to q, p \vdash p \to q}(\text{aff})}{p \to q, p \vdash q}(\to_e)}{p \to q, \neg q, p \vdash q}(\text{aff}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\neg q \vdash \neg q}(\text{ax})}{p \to q, \neg q, p \vdash \neg q}(\text{aff})}{p \to q, \neg q, p \vdash \bot}(\neg_e)}{p \to q, \neg q \vdash \neg p}(\neg_i)}{p \to q \vdash \neg q \to \neg p}(\to_i)}{\vdash (p \to q) \to (\neg q \to \neg p)}(\to_i)$$

3.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash p}(\text{ax})}{p \to q, q \to r, p \vdash p}(\text{aff}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{p \to q \vdash p \to q}(\text{ax})}{p \to q, q \to r, p \vdash p \to q}(\text{aff})}{p \to q, q \to r, p \vdash q}(\to_e) \qquad \dfrac{\dfrac{}{q \to r \vdash q \to r}(\text{ax})}{p \to q, q \to r, p \vdash q \to r}(\text{aff})}{p \to q, q \to r, p \vdash r}(\to_e)}{p \to q, q \to r \vdash p \to r}(\to_i)$$

4.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \wedge q \vdash p \wedge q}(\text{ax})}{p \wedge q \vdash p}(\wedge_e^1) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \wedge q \vdash p \wedge q}(\text{ax})}{p \wedge q \vdash q}(\wedge_e^2)}{p \wedge q \vdash \neg p \vee q}(\vee_i^2)}{p \wedge q \vdash p \wedge (\neg p \vee \neg q)}(\wedge_i)}{\vdash (p \wedge q) \to (p \wedge (\neg p \vee \neg q))}(\to_i)$$

Exercice 2 (Backtracking)

1. (a) Si $a = \top$, la clause contenant a est donc vraie, et donc disparait. Et celle contenant $\overline{a}$ ne dépend que du reste. On trouve donc :

$$F(\top, b, c, d) = bc, \overline{b}c, \overline{c}\overline{d}, \overline{c}d.$$

(b) Si $a = \bot$, la clause contenant $\overline{a}$ est donc vraie, et donc disparait. Et celle contenant a ne dépend que du reste. On trouve donc :

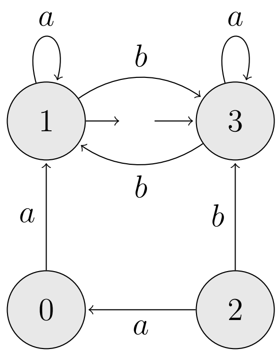
$$F(\bot, b, c, d) = bc, \overline{c}\overline{d}, d.$$

(c) /

2. /
3. (a)
```
let rec positive exp = match exp with
  | [] -> []
  | t::q -> match t with
              | [] -> positive q
              | 0::r -> r::(positive q)
              | 1::r -> positive q
              | (-1)::r -> r::(positive q)
;;
```
   (b)
```
let rec negative exp = match exp with
  | [] -> []
  | t::q -> match t with
              | [] -> negative q
              | 0::r -> r::(negative q)
              | (-1)::r -> negative q
              | 1::r -> r::(negative q)
;;
```
   (c) On suppose ici que l'expression ne possède qu'une variable.
```
let solution exp =
  let rec aux exp = match exp with
    | [] -> (true,0)
    | []::[] -> (false,0)
    | [0]::[] -> (false,0)
    | [0]::q -> aux q
    | [1]::q -> let (b,v) = aux q in
                  if ((v=1)||(v=0))&&b then (true,1)
                  else (false,0)
    | [-1]::q -> let (b,v) = aux q in
                  if ((v=-1)||(v=0))&&b then (true,-1)
                  else (false,0)
  in
  let (b,i) = aux exp in b
;;
```
   (d)
```
let rec recherche_sat exp =
  if exp = [] then true
  else
    if List.length (List.hd exp) = 1 then solution exp
    else (recherche_sat (positive exp))||(recherche_sat (negative exp)
;;
```

Exercice 3 (Théorie des automates et des langages rationnels)

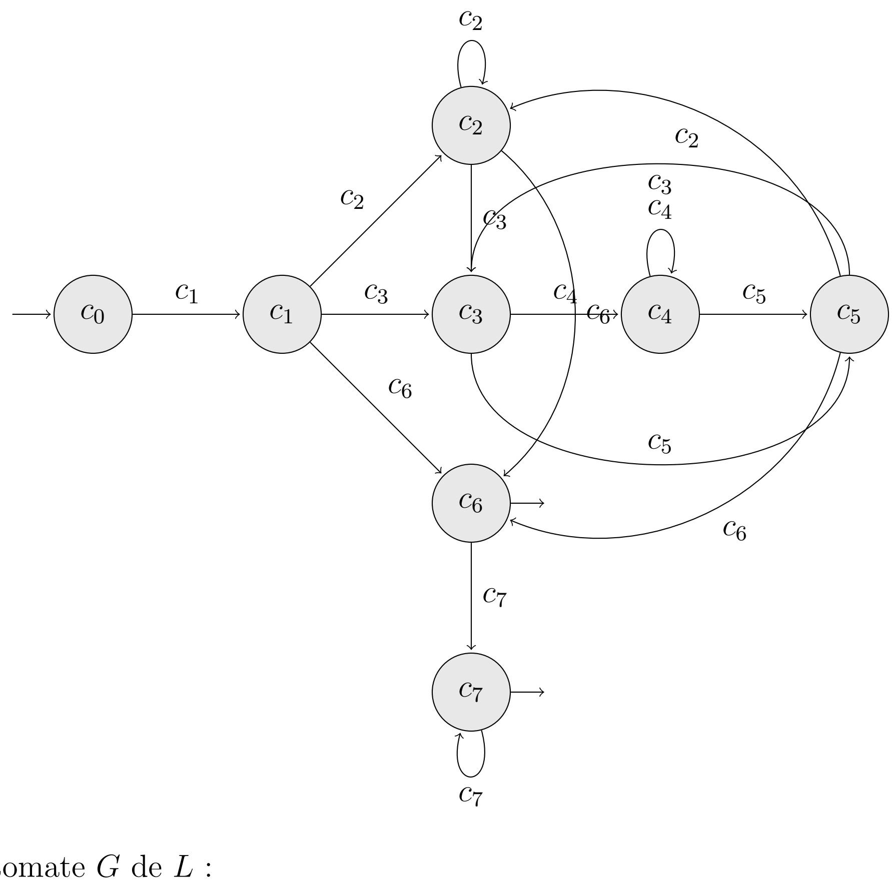
1. $\sqrt{L} = a^* + b^*$.
2. $\sqrt{L} = a^* + b^*$.
3. Voici l'automate demandé :



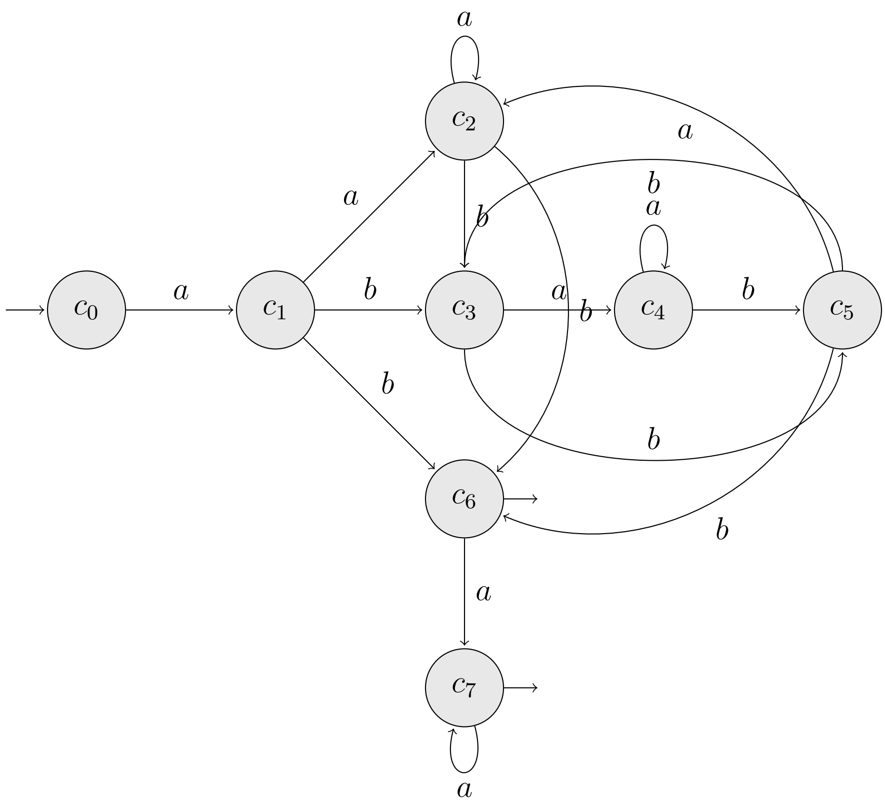
4. L' est décrit par $c_1(c_2 + c_3c_4^*c_5)^*c_6c_7^*$.
   On a alors $P = \{c_1\}$, $S = \{c_6, c_7\}$ et

   $$F = \{c_1c_2, c_1c_3, c_2c_3, c_5c_2, c_3c_4, c_4c_4, c_3c_5, c_4c_5, c_2c_2, c_5c_3, c_1c_6, c_6c_7, c_7c_7, c_2c_6, c_5c_6\}.$$

   On en déduit l'automate :



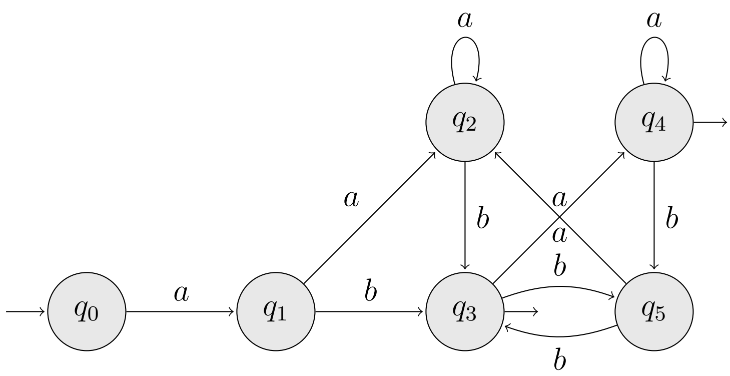
   puis l'automate G de L :



5. Avec l'automate des parties :

	a	b
$q_0 = \{c_0\}$	$\{c_1\}$	
$q_1 = \{c_1\}$	$\{c_2\}$	$\{c_3, c_6\}$
$q_2 = \{c_2\}$	$\{c_2\}$	$\{c_3, c_6\}$
$q_3 = \{c_3, c_6\}$	$\{c_4, c_7\}$	$\{c_5\}$
$q_4 = \{c_4, c_7\}$	$\{c_4, c_7\}$	$\{c_5\}$
$q_5 = \{c_5\}$	$\{c_2\}$	$\{c_3, c_6\}$

et on obtient :



6. On a :

$$\begin{aligned} u \in \sqrt{L} &\Leftrightarrow uu \in L \\ &\Leftrightarrow uu \text{ est reconnu par } A \\ &\Leftrightarrow \delta^*(q_0, uu) \in F \\ &\Leftrightarrow \delta^*(\delta^*(q_0, u), u) \in F \\ &\Leftrightarrow \exists q \in Q,\ q = \delta^*(q_0, u) \text{ et } \delta^*(q, u) \in F \\ &\Leftrightarrow \exists q \in Q,\ u \in L_{q_0,\{q\}} \text{ et } u \in L_{q,F} \end{aligned}$$

7. On a avec la question précédente :

$$\sqrt{L} = \{u \in \Sigma^* \mid \exists q \in Q,\ u \in L_{q_0,\{q\}} \text{ et } u \in L_{q,F}\} = \bigcup_{q \in Q} \left(L_{q_0,\{q\}} \cap L_{q,F}\right).$$

Comme $L_{q_0,\{q\}}$ et $L_{q,F}$ sont rationnels pour tout $q \in Q$ et que l'intersection et l'union de langages rationnels est rationnel, $\sqrt{L}$ est donc rationnel.

8. Si $m \in \sqrt{L} \odot \sqrt{L}$ alors $m = uu$ avec $u \in \sqrt{L}$ et donc $m \in L$. Donc $\sqrt{L} \odot \sqrt{L} \subset L$. L'inclusion réciproque est fausse : si $L = \{a, b\}$, $\sqrt{L} = \varnothing$, $\sqrt{L} \odot \sqrt{L} = \varnothing$ et donc $L \not\subset \sqrt{L} \odot \sqrt{L}$.