Structures Hopf-algébriques et opéradiques sur différentes familles d'arbres

Anthony Mansuy

31 mai 2013

Soit $\mathcal{D}$ un ensemble.
L'algèbre de Hopf de battage $\mathbf{Sh}^{\mathcal{D}}$ a pour base l'ensemble des mots en l'alphabet $\mathcal{D}$.

- Son produit $\times_{Sh}$ est donné par les battages des mots. Par exemple :

$$\begin{aligned}(abc) \times_{Sh} (d) &= (abcd) + (abdc) + (adbc) + (dabc),\\ (ab) \times_{Sh} (cd) &= (abcd) + (acbd) + (cabd)\\ &\quad +(acdb) + (cadb) + (cdab).\end{aligned}$$

- Son coproduit est donné par la déconcaténation. Par exemple :

$$\begin{aligned}\Delta(abcd) &= (abcd) \otimes 1 + (abc) \otimes (d) + (ab) \otimes (cd)\\ &\quad +(a) \otimes (bcd) + 1 \otimes (abcd).\end{aligned}$$

Supposons de plus que $\mathcal{D}$ est muni d'un produit associatif et commutatif $[\cdot,\cdot] : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$.
L'algèbre de Hopf de battage contractant $\mathbf{Csh}^{\mathcal{D}}$ a aussi pour base l'ensemble des mots en l'alphabet $\mathcal{D}$.

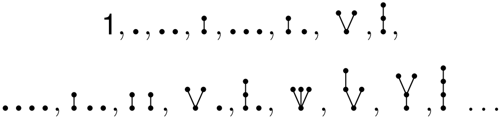
- Son produit $\times_{Csh}$ est donné par les battages des mots avec contractions éventuelles des lettres. Par exemple :

$$\begin{aligned}
(ab) \times_{Csh} (c) &= (abc) + (acb) + (cab) + (a[b,c]) \\
&\quad + ([a,c]b) \\
(ab) \times_{Csh} (cd) &= (ab) \times_{Sh} (cd) + (a[b,c]d) \\
&\quad + (c[a,d]b) + ([a,c]bd) + ([a,c]db) \\
&\quad + (ac[b,d]) + (ca[b,d]) + ([a,c][b,d])
\end{aligned}$$

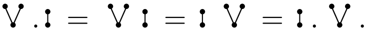
- Son coproduit est la déconcaténation, comme pour $\mathbf{Sh}^{\mathcal{D}}$.

L'algèbre des arbres enracinés $\mathbf{H}_{CK}$ est introduite par Connes et Kreimer pour la Renormalisation en Théorie des Champs Quantiques.

- Une base de cette algèbre est donnée par les forêts enracinées :



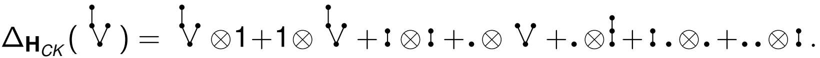
- Le produit est donné par l'union disjointe des forêts.



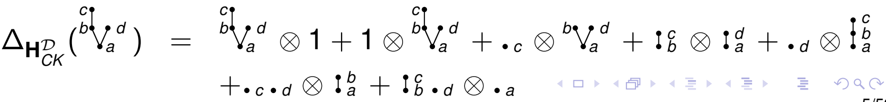
- Le coproduit est donné par les coupes admissibles :

$$\Delta_{\mathbf{H}_{CK}}(F) = \sum_{\boldsymbol{c} \text{ coupe admissible}} Lea_{\mathbf{c}}(F) \otimes Roo_{\mathbf{c}}(F).$$

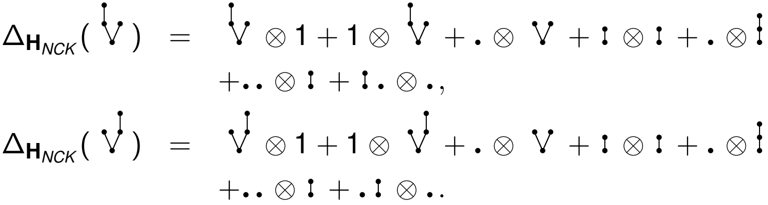
coupe $\boldsymbol{c}$									totale
Admissible ?	oui	oui	oui	oui	non	oui	oui	non	oui
$Roo_{\mathbf{c}}(F)$					$\times$	$\bullet$		$\times$	1
$Lea_{\mathbf{c}}(F)$	1		$\bullet$	$\bullet$	$\times$		$\bullet\,\bullet$	$\times$	



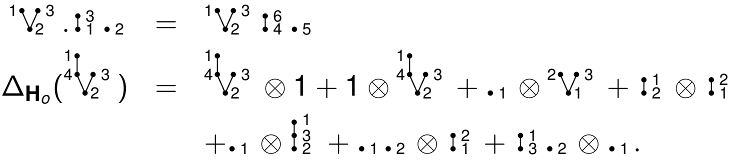
Il existe une version décorée $\mathbf{H}_{CK}^{\mathcal{D}}$:



- $\mathbf{H}_{NCK}$ l'algèbre de Hopf des arbres enracinés plans :



- $\mathbf{H}_o$ l'algèbre de Hopf des forêts ordonnées :



- $\mathbf{H}_{ho}$ la sous-algèbre de Hopf de $\mathbf{H}_o$ des forêts ordonnées en tas.

Soient $\mathcal{D}$ un ensemble et $(f_a)_{a\in\mathcal{D}}$ des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ intégrables. Posons :

$$I(a_1\dots a_k)=\int_0^1 f_{a_k}(x_k)dx_k\int_0^{x_k} f_{a_{k-1}}(x_{k-1})dx_{k-1}\dots\int_0^{x_2} f_{a_1}(x_1)dx_1$$

Alors I est un caractère de $\mathbf{Sh}^{\mathcal{D}}$, c'est-à-dire :

$$I(a_1\dots a_p)I(b_1\dots b_q)=I\left((a_1\dots a_p)\times_{Sh}(b_1\dots b_q)\right).$$

Exemples

$$\begin{aligned}
I(a)I(b) &= \int_0^1 f_a(x)dx\int_0^1 f_b(y)dy\\
&= \int_0^1 f_a(x)dx\int_0^x f_b(y)dy+\int_0^1 f_b(y)dy\int_0^y f_a(x)dx\\
&= I(ba)+I(ab).
\end{aligned}$$

Définition

Un ordre linéaire sur une forêt $F \in \mathbf{H}_{CK}$ à n sommets est une application bijective $\sigma : V(F) \to \{1, \ldots, n\}$ telle que si, $a, b \in V(F)$,

$$(a \twoheadrightarrow b \text{ dans } F) \Longrightarrow (\sigma(a) \geq \sigma(b)).$$

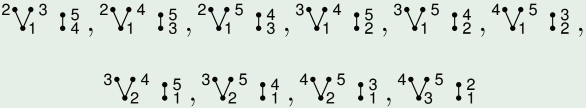
On note $\mathcal{O}(F)$ l'ensemble des ordres linéaires sur F.

Exemples

- Si $F =$ , les ordres linéaires possibles sur F sont :

Exemples

- Si $F =$ , les ordres linéaires possibles sur F sont :



Théorème

L'application Φ suivante définit un morphisme surjectif de l'algèbre de Hopf $\mathbf{H}_{CK}^{\mathcal{D}}$ vers $\mathbf{Sh}^{\mathcal{D}}$:

$$F \text{ forêt de degré } n \xrightarrow{\Phi} \sum_{\sigma \in \mathcal{O}(F)} \sigma^{-1}(n) \ldots \sigma^{-1}(1),$$

où $\sigma^{-1}(i)$ est la décoration associée au sommet d'image par σ égale à i.

Exemples

$$
\begin{array}{rcl}
\Phi(\bullet_a) & = & (a), \\
\Phi\left(\begin{smallmatrix}\bullet_b \\ | \\ \bullet_a\end{smallmatrix}\right) & = & (ba), \\
\Phi(\bullet_a \bullet_b) & = & (ab) + (ba), \\
\Phi\left(\begin{smallmatrix}\bullet_c \\ | \\ \bullet_b \\ | \\ \bullet_a\end{smallmatrix}\right) & = & (cba), \\
\Phi\left({}^{b}\bigvee_{a}{}^{c}\right) & = & (bca) + (cba), \\
\Phi\left(\bullet_a \begin{smallmatrix}\bullet_c \\ | \\ \bullet_b\end{smallmatrix}\right) & = & (cba) + (cab) + (acb), \\
\Phi(\bullet_a \bullet_b \bullet_c) & = & (abc) + (acb) + (bac) + (bca) + (cab) + (cba).
\end{array}
$$

On a donc :

- un morphisme d'algèbres $I : \mathbf{Sh}^{\mathcal{D}} \to \mathbb{R}$,
- un morphisme d'algèbres surjectif $\Phi : \mathbf{H}_{CK}^{\mathcal{D}} \to \mathbf{Sh}^{\mathcal{D}}$.

On définit alors un morphisme d'algèbres $J = I \circ \Phi : \mathbf{H}_{CK}^{\mathcal{D}} \to \mathbb{R}$.

Exemple

$$J\left({}^{b}\!\vee^{c}_{a}\right) = \int_0^1 f_a(x)dx \int_0^x f_b(y)dy \int_0^x f_c(z)dz.$$

Applications : calcul moulien, chemins rugueux.

Question : description de tous les morphismes d'algèbres de Hopf de $\mathbf{H}_{CK}^{\mathcal{D}}$ dans $\mathbf{Sh}^{\mathcal{D}}$?

Notons $\mathbb{T}_{CK}^{\mathcal{D}}$ l'ensemble des arbres enracinés décorés par $\mathcal{D}$.
Soit $\varphi : K\left(\mathbb{T}_{CK}^{\mathcal{D}}\right) \to K(\mathcal{D})$ une application linéaire.

Théorème

Il existe un unique morphisme d'algèbres de Hopf $\Phi : \mathbf{H}_{CK}^{\mathcal{D}} \to \mathbf{Sh}^{\mathcal{D}}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
K\left(\mathbb{T}_{CK}^{\mathcal{D}}\right) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook] & K(\mathcal{D}) \\
\mathbf{H}_{CK}^{\mathcal{D}} \arrow[r, "\Phi"] & \mathbf{Sh}^{\mathcal{D}} \arrow[u, two heads]
\end{tikzcd}$$

On cherche à donner une description combinatoire de Φ.

Exemples

- En degré 1, $\Phi(\bullet_a) = \varphi(\bullet_a)$.
- En degré 2,

$$
\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{I}^{b}_{a}) &= \varphi(\bullet_b)\varphi(\bullet_a) + \varphi(\mathbf{I}^{b}_{a}) \\
\Phi(\bullet_a \bullet_b) &= \varphi(\bullet_a)\varphi(\bullet_b) + \varphi(\bullet_b)\varphi(\bullet_a).
\end{aligned}
$$

- En degré 3,

$$
\begin{aligned}
\Phi({}^{b}\mathbf{V}^{c}_{a}) &= \varphi(\bullet_b)\varphi(\bullet_c)\varphi(\bullet_a) + \varphi(\bullet_c)\varphi(\bullet_b)\varphi(\bullet_a) \\
&\quad + \varphi(\bullet_b)\varphi(\mathbf{I}^{c}_{a}) + \varphi(\bullet_c)\varphi(\mathbf{I}^{b}_{a}) + \varphi({}^{b}\mathbf{V}^{c}_{a}) \\
\Phi(\mathbf{I}^{c}_{b\,a}) &= \varphi(\bullet_c)\varphi(\bullet_b)\varphi(\bullet_a) + \varphi(\bullet_c)\varphi(\mathbf{I}^{b}_{a}) + \varphi(\mathbf{I}^{c}_{b})\varphi(\bullet_a) \\
&\quad + \varphi(\mathbf{I}^{c}_{b\,a})
\end{aligned}
$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
\Phi\left({}^{c}_{b}\mathbf{V}_{a}^{d}\right) = \; & \varphi(\bullet_c)\varphi(\bullet_b)\varphi(\bullet_d)\varphi(\bullet_a) + \varphi(\bullet_c)\varphi(\bullet_d)\varphi(\bullet_b)\varphi(\bullet_a) \\
& + \varphi(\bullet_d)\varphi(\bullet_c)\varphi(\bullet_b)\varphi(\bullet_a) + \varphi(\bullet_c)\varphi(\bullet_b)\varphi(\mathbf{I}\,{}^{d}_{a}) \\
& + \varphi(\bullet_c)\varphi(\bullet_d)\varphi(\mathbf{I}\,{}^{b}_{a}) + \varphi(\bullet_d)\varphi(\bullet_c)\varphi(\mathbf{I}\,{}^{b}_{a}) \\
& + \varphi(\mathbf{I}\,{}^{c}_{b})\varphi(\bullet_d)\varphi(\bullet_a) + \varphi(\bullet_d)\varphi(\mathbf{I}\,{}^{c}_{b})\varphi(\bullet_a) \\
& + \varphi(\mathbf{I}\,{}^{c}_{b})\varphi(\mathbf{I}\,{}^{d}_{a}) + \varphi(\bullet_c)\varphi({}^{b}\mathbf{V}_{a}^{d}) + \varphi(\bullet_d)\varphi\left(\mathbf{I}\,\substack{c\\b\\a}\right) \\
& + \varphi\left({}^{c}_{b}\mathbf{V}_{a}^{d}\right).
\end{aligned}
$$

Deux objets combinatoires apparaissent :

- Les partitions d'un arbre.
- Les ordres linéaires sur un arbre.

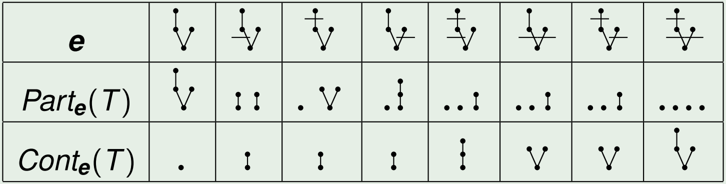
Définitions

Soit $F \in \mathbf{H}_{CK}$ une forêt non vide et $\boldsymbol{e}$ une contraction de F, c'est-à-dire un sous-ensemble de $E(F)$.

- La partition de F par $\boldsymbol{e}$ est la sous-forêt de F obtenue en conservant tous les sommets de F et les arêtes de $\boldsymbol{e}$. On la note $Part_{\boldsymbol{e}}(F)$.
- Le contracté de F par $\boldsymbol{e}$ est la forêt obtenue en contractant dans F chaque arête de $\boldsymbol{e}$ et en identifiant leurs extrémités. On le note $Cont_{\boldsymbol{e}}(F)$.

Exemples

Considérons $T =$  . Alors



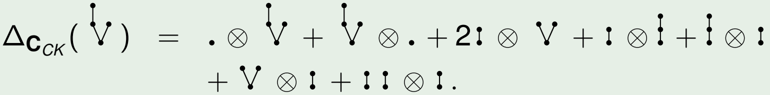
où, à la première ligne, les arêtes n'appartenant pas à e sont barrées.

Soit I_{CK} l'idéal de $\mathbf{H}_{CK}$ engendré par l'élément $\bullet - 1$. On note $\mathbf{C}_{CK}$ l'algèbre quotient $\mathbf{H}_{CK}/I_{CK}$: on identifie dans $\mathbf{C}_{CK}$ les éléments 1 et $\bullet$.

On définit sur $\mathbf{C}_{CK}$ le coproduit de contraction :

$$\Delta_{\mathbf{C}_{CK}}(F) = \sum_{\boldsymbol{e} \subseteq E(F)} Part_{\boldsymbol{e}}(F) \otimes Cont_{\boldsymbol{e}}(F)$$

Exemple



On retrouve le coproduit introduit par D. Calaque, K. Ebrahimi-Fard et D. Manchon dans [CEFM].

Considérons la counité :

$$\varepsilon : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{C}_{CK} & \rightarrow & \mathbb{K} \\ F \text{ forêt} & \mapsto & \delta_{F,\bullet}. \end{array} \right.$$

Théorème

$(\mathbf{C}_{CK}, \Delta_{\mathbf{C}_{CK}}, \varepsilon)$ est une algèbre de Hopf commutative, non cocommutative, graduée par le nombre d'arêtes.

Proposition (Description de Φ)

Soit T un arbre non vide $\in \mathbf{H}_{CK}^{\mathcal{D}}$. Alors

$$\Phi(T) = \sum_{\boldsymbol{e} \subseteq E(T)} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{O}(Cont_{\boldsymbol{e}}(F))} \varphi(\sigma^{-1}(k)) \ldots \varphi(\sigma^{-1}(1)) \right),$$

où k est le nombre de sommets de $Cont_{\boldsymbol{e}}(F)$ et où $\sigma^{-1}(i)$ est la composante connexe de $Part_{\boldsymbol{e}}(F)$ d'image par σ égale à i.

Remarque

Supposons que $\varphi(\bullet_a) = a$ et que $\varphi(T) = 0$ lorsque T est de degré au moins deux.
Alors on retrouve le morphisme d'algèbres surjectif $\Phi : \mathbf{H}_{CK}^{\mathcal{D}} \to \mathbf{Sh}^{\mathcal{D}}$ défini plus haut.

Soient $s_1, \ldots, s_k \in \mathbb{N}^*$, $s_1 \geq 2$. On pose :

$$\zeta(s_1 \ldots s_k) = \sum_{n_1 > \ldots > n_k > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} \ldots n_k^{s_k}}.$$

Alors ζ est un caractère de $\mathbf{Csh}^{\mathcal{D}}$, c'est-à-dire :

$$\zeta(s_1 \ldots s_p)\zeta(t_1 \ldots t_q) = \zeta((s_1 \ldots s_p) \times_{Csh} (t_1 \ldots t_q)).$$

Exemple

$$\begin{aligned} \zeta(s)\zeta(t) &= \sum_{n>0, m>0} \frac{1}{n^s m^t} \\ &= \sum_{n>m>0} \frac{1}{n^s m^t} + \sum_{m>n>0} \frac{1}{n^s m^t} + \sum_{n>0} \frac{1}{n^{s+t}} \\ &= \zeta(st) + \zeta(ts) + \zeta(s+t), \end{aligned}$$

avec ici $[s, t] = s + t$.

Soit $\varphi : K\left(\mathbb{T}_{CK}^{\mathcal{D}}\right) \to K(\mathcal{D})$. On suppose que $\mathcal{D}$ est muni d'un produit associatif et commutatif $[\cdot,\cdot] : (a,b) \in \mathcal{D}^2 \mapsto [a,b] \in \mathcal{D}$.

Théorème

Il existe un unique morphisme d'algèbres de Hopf $\Phi : \mathbf{H}_{CK}^{\mathcal{D}} \to \mathbf{Csh}^{\mathcal{D}}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} K\left(\mathbb{T}_{CK}^{\mathcal{D}}\right) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook] & K(\mathcal{D}) \\ \mathbf{H}_{CK}^{\mathcal{D}} \arrow[r, "\Phi"] & \mathbf{Csh}^{\mathcal{D}} \arrow[u, two heads] \end{tikzcd}$$

Exemples

- En degré 1, $\Phi(\bullet_a) = \varphi(\bullet_a)$.
- En degré 2,

$$\begin{aligned}
\Phi(\bullet_a \bullet_b) &= \varphi(\bullet_a)\varphi(\bullet_b) + \varphi(\bullet_b)\varphi(\bullet_a) + [\varphi(\bullet_a), \varphi(\bullet_b)] \\
\Phi(\mathbf{I}\substack{b\\a}) &= \varphi(\bullet_b)\varphi(\bullet_a) + \varphi(\mathbf{I}\substack{b\\a}).
\end{aligned}$$

- En degré 3,

$$\begin{aligned}
\Phi({}^{b}\!\vee^{c}_{a}) &= \varphi(\bullet_b)\varphi(\bullet_c)\varphi(\bullet_a) + \varphi(\bullet_c)\varphi(\bullet_b)\varphi(\bullet_a) \\
&\quad + [\varphi(\bullet_c), \varphi(\bullet_b)]\,\varphi(\bullet_a) + \varphi(\bullet_b)\varphi(\mathbf{I}\substack{c\\a}) \\
&\quad + \varphi(\bullet_c)\varphi(\mathbf{I}\substack{b\\a}) + \varphi({}^{b}\!\vee^{c}_{a}) \\
\Phi(\mathbf{I}\substack{c\\b\\a}) &= \varphi(\bullet_c)\varphi(\bullet_b)\varphi(\bullet_a) + \varphi(\bullet_c)\varphi(\mathbf{I}\substack{b\\a}) + \varphi(\mathbf{I}\substack{c\\b})\varphi(\bullet_a) \\
&\quad + \varphi(\mathbf{I}\substack{c\\b\\a})
\end{aligned}$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
\Phi\left({}^{\overset{c}{b}}\mathrm{V}^{d}_{a}\right) = {} & \varphi(\bullet_c)\varphi(\bullet_b)\varphi(\bullet_d)\varphi(\bullet_a) + \varphi(\bullet_c)\left[\varphi(\bullet_b), \varphi(\bullet_d)\right]\varphi(\bullet_a) \\
& + \varphi(\bullet_c)\varphi(\bullet_d)\varphi(\bullet_b)\varphi(\bullet_a) + \left[\varphi(\bullet_c), \varphi(\bullet_d)\right]\varphi(\bullet_b)\varphi(\bullet_a) \\
& + \varphi(\bullet_d)\varphi(\bullet_c)\varphi(\bullet_b)\varphi(\bullet_a) + \varphi(\bullet_c)\varphi(\bullet_b)\varphi\left(\mathrm{I}\begin{smallmatrix} d \\ a \end{smallmatrix}\right) \\
& + \varphi(\bullet_c)\varphi(\bullet_d)\varphi\left(\mathrm{I}\begin{smallmatrix} b \\ a \end{smallmatrix}\right) + \varphi(\bullet_d)\varphi(\bullet_c)\varphi\left(\mathrm{I}\begin{smallmatrix} b \\ a \end{smallmatrix}\right) \\
& + \varphi\left(\mathrm{I}\begin{smallmatrix} c \\ b \end{smallmatrix}\right)\varphi(\bullet_d)\varphi(\bullet_a) + \left[\varphi\left(\mathrm{I}\begin{smallmatrix} c \\ b \end{smallmatrix}\right), \varphi(\bullet_d)\right]\varphi(\bullet_a) \\
& + \varphi(\bullet_d)\varphi\left(\mathrm{I}\begin{smallmatrix} c \\ b \end{smallmatrix}\right)\varphi(\bullet_a) + \varphi\left(\mathrm{I}\begin{smallmatrix} c \\ b \end{smallmatrix}\right)\varphi\left(\mathrm{I}\begin{smallmatrix} d \\ a \end{smallmatrix}\right) + \varphi(\bullet_c)\varphi\left({}^{b}\mathrm{V}^{d}_{a}\right) \\
& + \varphi(\bullet_d)\varphi\left(\mathrm{I}\begin{smallmatrix} c \\ b \\ a \end{smallmatrix}\right) + \varphi\left({}^{\overset{c}{b}}\mathrm{V}^{d}_{a}\right).
\end{aligned}
$$

La notion de partitions d'un arbre apparaît encore. Par contre, ce n'est plus des odres linéaires qui apparaissent, mais des préordres linéaires.

Définition

Un préordre linéaire sur une forêt $F \in \mathbf{H}_{CK}$ à n sommets est une application surjective $\sigma : V(F) \to \{1, \ldots, k\}$, $1 \leq k \leq n$, telle que si, $a, b \in V(F)$, $a \neq b$,

$$(a \twoheadrightarrow b \text{ dans } F) \Longrightarrow (\sigma(a) > \sigma(b)).$$

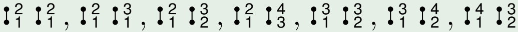
On note $\mathcal{O}_p(F)$ l'ensemble des préordres linéaires sur F.

Exemple

- Si $F =$ , les préordres linéaires possibles sur F sont :

Exemple

- Si $F =$ , les préordres linéaires possibles sur F sont :



Proposition (Description de Φ)

Soit T un arbre non vide $\in \mathbf{H}_{CK}^{\mathcal{D}}$. Alors

$$\Phi(T) = \sum_{\boldsymbol{e} \subseteq E(T)} \left(\sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{O}_p(Cont_{\boldsymbol{e}}(T)) \\ Im(\sigma) = \{1,\ldots,q\}}} \varphi(\sigma^{-1}(q)) \ldots \varphi(\sigma^{-1}(1)) \right).$$

où, pour tout $i \in \{1, \ldots, q\}$,

- $\sigma^{-1}(i)$ est la forêt $T_1 \ldots T_n$ de toutes les composantes connexes T_k de $Part_{\boldsymbol{e}}(F)$ telles que $\sigma(T_k) = i$.
- $\varphi(\sigma^{-1}(i)) = [\varphi(T_1), \ldots, \varphi(T_n)]^{(n)}$.

Rappelons qu'un préordre sur un ensemble est une relation binaire, réflexive et transitive.

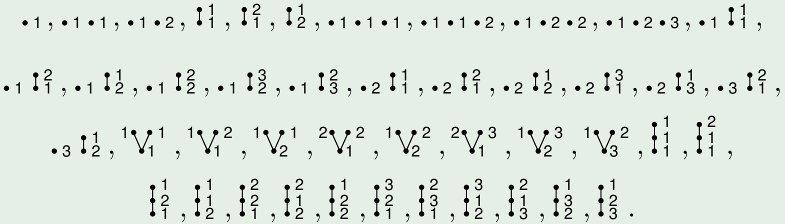
Définition

Une forêt préordonnée est une forêt enracinée $F \in \mathbf{H}_{CK}$ telle qu'on ait de façon équivalente :

- Un préordre total sur l'ensemble $V(F)$.
- Une surjection $\sigma : V(F) \to \{1, \ldots, k\}$, avec k un entier inférieur au nombre de sommets de F.

Exemples

En degré ≤ 3,

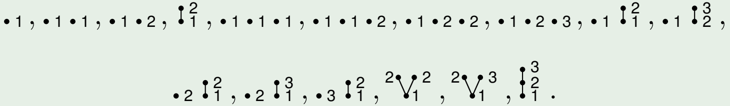


Définition

Une forêt préordonnée en tas est une forêt préordonnée (F, σ) où $\sigma : V(F) \to \{1, \ldots, k\}$ est un préordre linéaire.

Exemples

En degré ≤ 3,

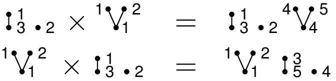


Voici quelques valeurs numériques :

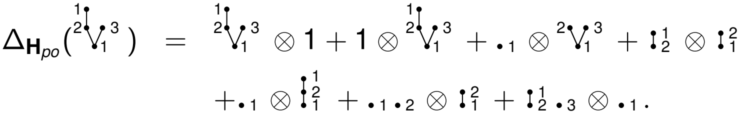
n	0	1	2	3	4	5
f_n^{po}	1	1	5	38	424	6284
f_n^{hpo}	1	1	3	12	64	428

L'espace vectoriel $\mathbf{H}_{po}$ engendré par les forêts préordonnées est une algèbre de Hopf :

- Le produit de F par G est obtenu en concaténant F et G et en décalant les indices des sommets de G :



- Le coproduit de F est le coproduit de coupe avec le préordre induit par celui de F sur les branches et le tronc :



L'espace vectoriel $\mathbf{H}_{hpo}$ engendré par les forêts préordonnées en tas est une sous-algèbre de Hopf de $\mathbf{H}_{po}$.

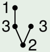
Nous avons alors le diagramme suivant

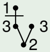
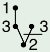
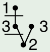
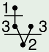
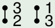
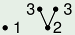
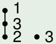
$$\begin{tikzcd}
\mathbf{H}_{NCK} \arrow[r, hook] & \mathbf{H}_{ho} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathbf{H}_{o} \arrow[d, hook] \\
& \mathbf{H}_{hpo} \arrow[r, hook] & \mathbf{H}_{po}
\end{tikzcd}$$

où les flèches $\hookrightarrow$ sont des morphismes d'algèbres de Hopf injectifs pour le coproduit de coupe.

Si F est une forêt préordonnée, alors $Part_{\boldsymbol{e}}(F)$ et $Cont_{\boldsymbol{e}}(F)$ sont aussi des forêts préordonnées.

Exemples

Considérons $T =$  . Alors

$\boldsymbol{e}$						...	
$Part_{\boldsymbol{e}}(T)$						...	$\bullet\,1\ \bullet\,2\ \bullet\,3\ \bullet\,3$
$Cont_{\boldsymbol{e}}(T)$	$\bullet\,1$					...	

où, à la première ligne, les arêtes n'appartenant pas à $\boldsymbol{e}$ sont barrées.

On construit l'algèbre quotient $\mathbf{C}_{po}$ de $\mathbf{H}_{po}$. Elle est engendrée par l'ensemble des forêts sans sommet isolé.

De la même façon, on définit $\mathbf{C}_{hpo}$, $\mathbf{C}_{o}$, $\mathbf{C}_{ho}$ et $\mathbf{C}_{NCK}$.

Théorème

$\mathbf{C}_{po}$ est une algèbre de Hopf, graduée par le nombre d'arêtes, et nous avons alors le diagramme suivant :

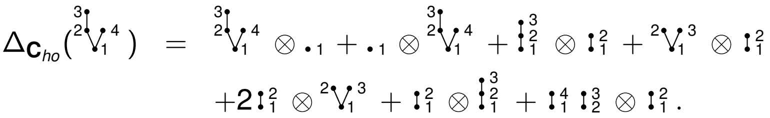
$$\begin{tikzcd} \mathbf{C}_{ho} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathbf{C}_{o} \arrow[d, hook] \\ \mathbf{C}_{hpo} \arrow[r, hook] & \mathbf{C}_{po} \end{tikzcd}$$

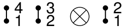
où les flèches $\hookrightarrow$ sont des morphismes d'algèbres de Hopf injectifs pour le coproduit de contraction.

Proposition

$\mathbf{C}_{NCK}$ est un comodule à gauche sur $\mathbf{C}_{ho}$.

Remarque : $\mathbf{C}_{NCK}$ n'est pas une algèbre de Hopf. Par exemple,



Alors  $\notin \mathbf{C}_{NCK} \otimes \mathbf{C}_{NCK}$.

Dans [FU], L. Foissy et J. Unterberger prouve le théorème suivant :

Théorème

1. Soit $n \geq 0$. Pour tout $(F, \sigma) \in \mathbb{F}_{\mathbf{H}_o}$, soit $\mathbb{S}_F$ l'ensemble des permutations $\theta \in \Sigma_n$ telles que pour tout $a, b \in V(F)$, $(a \twoheadrightarrow b) \Rightarrow (\theta^{-1}(\sigma(a)) \leq \theta^{-1}(\sigma(b)))$. Posons :

$$\Theta : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{H}_o & \rightarrow & \mathbf{FQSym} \\ F \in \mathbb{F}_{\mathbf{H}_o} & \mapsto & \displaystyle\sum_{\theta \in \mathbb{S}_F} \theta. \end{array} \right.$$

   Alors $\Theta : \mathbf{H}_o \rightarrow$ **FQSym** est un morphisme d'algèbres de Hopf homogène de degré 0.

2. La restriction de Θ à $\mathbf{H}_{ho}$ est un isomorphisme d'algèbres de Hopf graduées.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $Surj_n$ l'ensemble des applications $\tau : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{N}^*$, telles que $\tau(\{1, \ldots, n\}) = \{1, \ldots, k\}$ pour un certain k. On représente $\tau \in Surj_n$ par le mot tassé $(\tau(1) \ldots \tau(n))$.

On note $\mathbf{WQSym}^*$ l'espace vectoriel dont une base est donnée par l'union disjointe des ensembles $Surj_n$. $\mathbf{WQSym}^*$ est une algèbre de Hopf (introduite dans [NT]) :

- Le produit de τ et ω est donné en décalant les lettres de ω et en réalisant le battage de ces lettres avec celles de τ :

$$\begin{aligned}(112)(21) \quad = \quad & (11243) + (11423) + (14123) + (41123)\\ & +(11432) + (14132) + (41132) + (14312)\\ & +(41312) + (43112).\end{aligned}$$

- Le coproduit de τ est obtenu en réalisant toutes les coupes du mot représentant τ en deux mots et en tassant ceux-ci :

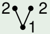
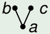
$$\begin{aligned}
& \Delta_{\mathbf{WQSym}^*}((21132)) \\
= \; & 1 \otimes (21132) + pk((2)) \otimes pk((1132)) \\
& + pk((21)) \otimes pk((132)) + pk((211)) \otimes pk((32)) \\
& + pk((2113)) \otimes pk((2)) + (21132) \otimes 1 \\
= \; & 1 \otimes (21132) + (1) \otimes (1132) + (21) \otimes (132) \\
& + (211) \otimes (21) + (2113) \otimes (1) + (21132) \otimes 1.
\end{aligned}$$

Définition

Soit (F, σ) une forêt préordonnée de degré n et $\tau \in Surj_n$. Alors on note $\mathbb{S}^{\tau}_{(F,\sigma)}$ l'ensemble des bijections $\varphi : V(F) \to \{1, \ldots, n\}$ telles que :

1. si $v \in V(F)$, alors $\sigma(v) = \tau(\varphi(v))$,
2. si $v, v' \in V(F)$, $v' \twoheadrightarrow v$, alors $\varphi(v) \geq \varphi(v')$.

Exemples

Soit $F =$  et $\tau = (221)$. En notant les sommets de F par , on a deux éléments $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{S}^{\tau}_{(F,\sigma)}$:

$$\varphi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} a & \to & 3 \\ b & \to & 2 \\ c & \to & 1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \varphi_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} a & \to & 3 \\ b & \to & 1 \\ c & \to & 2 \end{array} \right.$$

Théorème

Considérons

$$\Phi : \begin{cases} \mathbf{H}_{po} & \rightarrow & \mathbf{WQSym}^* \\ (F,\sigma) \text{ forêt de degré } n & \mapsto & \displaystyle\sum_{\tau \in Surj_n} \mathrm{card}(\mathbb{S}^{\tau}_{(F,\sigma)})\ \tau. \end{cases}$$

Alors :

- $\Phi : \mathbf{H}_{po} \rightarrow \mathbf{WQSym}^*$ est un morphisme d'algèbres de Hopf homogène de degré 0.
- La restriction de Φ à $\mathbf{H}_{hpo}$ est une injection d'algèbres de Hopf.

Exemples

- En degré 1 : $\Phi(\bullet_1) = (1)$.
- En degré 2 :

$$\Phi(\bullet_1 \bullet_1) = 2(11), \qquad \Phi(\bullet_1 \bullet_2) = (12) + (21), \qquad \Phi(\mathrm{I}^{a}_{b}) = (ab).$$

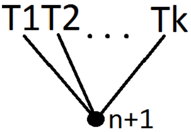
- En degré 3 :

$$\begin{aligned}
\Phi(\bullet_1 \bullet_1 \bullet_1) &= 6(111) & \Phi({}^{2}\mathrm{V}^{1}_{2}) &= (122) + (212) \\
\Phi(\mathrm{I}^{2}_{\substack{3\\1}}) &= (231) & \Phi({}^{2}\mathrm{V}^{2}_{1}) &= 2(221)
\end{aligned}$$

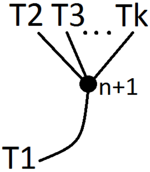
$$\begin{aligned}
\Phi(\mathrm{I}^{2}_{1} \bullet_2) &= (212) + 2(221) \\
\Phi(\bullet_2 \mathrm{I}^{1}_{3}) &= (213) + (123) + (132) \\
\Phi(\bullet_1 \mathrm{I}^{2}_{3}) &= (123) + (213) + (231) \\
\Phi(\bullet_1 \bullet_1 \bullet_2) &= 2\left[(112) + (121) + (211)\right]
\end{aligned}$$

Dans son article *Random walks on $\mathbb{R}$ and ordered trees : First applications*, F. Menous introduit les deux opérateurs de greffe suivants : $T_1 \ldots T_k$ forêt ordonnée de degré n.

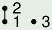
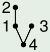
$B^{-}(T_1 \ldots T_k) =$

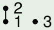


$B^{+}(T_1 \ldots T_k) =$



Exemples

$B^{-}($  $) =$ 

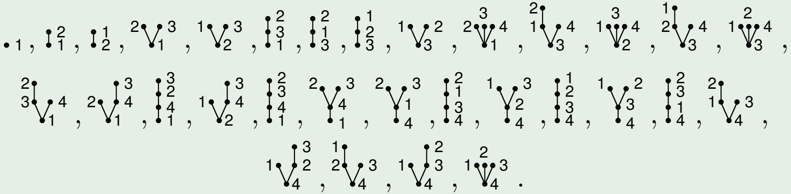
$B^{+}($  $) =$ 

Définition

Soit $\mathbb{T}_{\mathbf{B}} = \cup_{n\geq 1}\mathbb{T}_{\mathbf{B}}(n)$ l'ensemble des arbres défini récursivement par :

- si $n = 1$, $\mathbb{T}_{\mathbf{B}}(1) = \{\bullet_1\}$,
- si $n \geq 2$, soient $T_1, \ldots, T_k \in \cup_{1\leq i\leq n-1}\mathbb{T}_{\mathbf{B}}(i)$ dont la somme des degrés est $n-1$, et considérons les nouveaux arbres $B^-(T_1 \ldots T_k)$ et $B^+(T_1 \ldots T_k)$.

Exemples



Notons **B** l'algèbre engendrée par $\mathbb{T}_{\mathbf{B}}$, graduée par le nombre de sommets.

Proposition

La série formelle $F_{\mathbf{B}}(x)$ associée à **B** est donnée par :

$$F_{\mathbf{B}}(x) = \frac{1 + x - \sqrt{1 - 6x + x^2}}{4x}.$$

Voici quelques valeurs numériques :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$t_n^{\mathbf{B}}$	1	2	6	22	90	394	1806	8558
$f_n^{\mathbf{B}}$	1	3	11	45	197	903	4279	20793

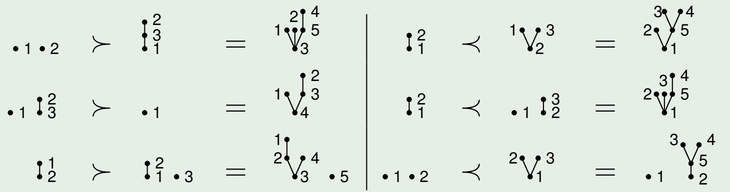
Théorème

- **B** est une algèbre de Hopf (pour le coproduit de coupe).
- **B** est libre (librement engendrée par $\mathbb{T}_{\mathbf{B}}$), colibre et auto-duale.

On définit deux opérations sur **B** :

- une greffe à gauche sur la racine $\succ$: $\mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \to \mathbf{B}$,
- une greffe à droite sur la racine $\prec$: $\mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \to \mathbf{B}$.

Exemples



Définition-Proposition

B est une algèbre bigreffe, c'est-à-dire un espace vectoriel A muni de trois opérations $*, \succ, \prec$: $A \otimes A \to A$ telles que pour tout $x, y, z \in A$:

$$\begin{array}{rcl}
(x * y) \succ z & = & x \succ (y \succ z), \\
(x \succ y) * z & = & x \succ (y * z), \\
(x \prec y) \prec z & = & x \prec (y * z), \\
(x * y) \prec z & = & x * (y \prec z), \\
(x \succ y) \prec z & = & x \succ (y \prec z), \\
(x * y) * z & = & x * (y * z).
\end{array}$$

Théorème

B est engendrée comme algèbre bigreffe par l'élément $\bullet_1$.

Remarque : **B** n'est pas librement engendrée comme algèbre bigreffe par l'élément $\bullet_1$: par exemple,

$$\bullet_1 \prec (\bullet_1 \prec \bullet_1) = \substack{\bullet_2 \\ | \\ \bullet_3 \\ | \\ \bullet_1} = \bullet_1 \prec (\bullet_1 \succ \bullet_1).$$

Nous allons chercher à décrire :

- l'algèbre bigreffe libre à un générateur.
- l'opérade bigreffe associée à la notion d'algèbre bigreffe.

Définition-Proposition

L'opérade bigreffe $\mathcal{BG}$ est l'opérade binaire, quadratique et régulière engendrée par trois opérations binaires $m, \succ, \prec$ satisfaisant les relations suivantes :

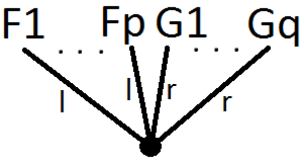
$$\begin{cases} \succ \circ(m, I) - \succ \circ(I, \succ), \\ m \circ (\succ, I) - \succ \circ(I, m), \\ \prec \circ(\prec, I) - \prec \circ(I, m), \\ \prec \circ(m, I) - m \circ (I, \prec), \\ \prec \circ(\succ, I) - \succ \circ(I, \prec), \\ m \circ (m, I) - m \circ (I, m). \end{cases}$$

Notons $\mathbf{H}^{lr}_{NCK}$ la K-algèbre des arbres plans dont les arêtes sont décorées par l ou r. C'est une algèbre de Hopf pour le coproduit de coupe.

Définition

Introduisons l'opérateur de greffe $B_{BG} : \mathbf{H}^{lr}_{NCK} \otimes \mathbf{H}^{lr}_{NCK} \to \mathbf{H}^{lr}_{NCK}$ défini par :

$$B_{BG}(F_1 \dots F_p \otimes G_1 \dots G_q) =$$



où $F_1, \dots, F_p$ et $G_1, \dots, G_q$ sont des arbres appartenant à $\mathbf{H}^{lr}_{NCK}$.

Exemples

$B_{BG}(1 \otimes 1) = \bullet$

$B_{BG}(\bullet \otimes \bullet) =$ 

$B_{BG}($ $\bullet \otimes 1) =$ 

$B_{BG}(\bullet\bullet \otimes 1) =$ 

$B_{BG}(\bullet \otimes 1) =$ 

$B_{BG}(1 \otimes \bullet\bullet) =$ 

$B_{BG}(\bullet \otimes$  $) =$ 

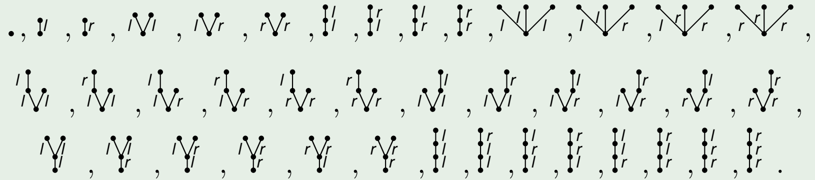
$B_{BG}(\bullet \otimes \bullet\bullet) =$ 

Définition

Soit $\mathbb{T}_{BG} = \cup_{n \geq 1} \mathbb{T}_{BG}(n)$ l'ensemble des arbres $\in \mathbf{H}^{lr}_{NCK}$ défini récursivement par :

- si $n = 1$, $\mathbb{T}_{BG}(1) = \{\bullet\}$,
- si $n \geq 2$, soient $T_1, \ldots, T_{p+q} \in \cup_{1 \leq i \leq n-1} \mathbb{T}_{BG}(n)$ dont la somme des degrés est $n-1$, et considérons le nouvelle arbre $B_{BG}(T_1 \ldots T_p \otimes T_{p+1} \ldots T_{p+q})$.

Exemples



Notons $\mathbf{H}_{BG}$ l'algèbre engendrée par $\mathbb{T}_{BG}$, graduée par le nombre de sommets.

Proposition

Les séries formelles associées à $\mathbf{H}_{BG}$ sont données par :

$$F_{\mathbf{H}_{BG}}(x) = \frac{3}{-1+4\cos^2\left(\frac{1}{3}\arcsin\left(\sqrt{\frac{27x}{4}}\right)\right)},$$

$$T_{\mathbf{H}_{BG}}(x) = \frac{4}{3}\sin^2\left(\frac{1}{3}\arcsin\left(\sqrt{\frac{27x}{4}}\right)\right).$$

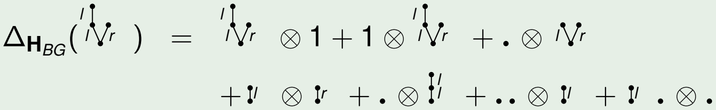
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$t_n^{\mathbf{H}_{BG}}$	1	2	7	30	143	728	3876	21318	120175
$f_n^{\mathbf{H}_{BG}}$	1	3	12	55	273	1428	7752	43263	246675

On peut démontrer que $(\mathbf{H}_{BG}, B_{BG})$ est un objet initial dans la catégorie des couples (A, L) où A est une algèbre et $L : A \otimes A \to A$ une application linéaire.

Théorème

Il existe une structure d'algèbre de Hopf "universelle" sur $\mathbf{H}_{BG}$ muni de l'opérateur B_{BG}, le coproduit étant donné par les coupes admissibles.

Exemples



En particulier, $\mathbf{H}_{BG}$ est une sous-algèbre de Hopf de $\mathbf{H}^{lr}_{NCK}$.

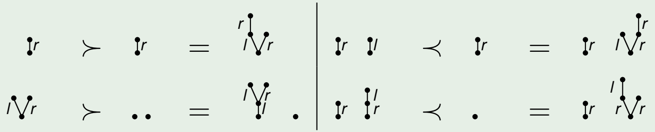
Définition

Soient $F = F_1 \ldots F_n$, $G = G_1 \ldots G_m$ deux forêts $\in \mathbf{H}_{BG}$ avec $F_1 = B_{BG}(F_1^1 \otimes F_1^2)$ et $G_m = B_{BG}(G_m^1 \otimes G_m^2)$. On pose

$$\begin{array}{rcl} G \succ F &=& B_{BG}(GF_1^1 \otimes F_1^2)F_2 \ldots F_n, \\ G \prec F &=& G_1 \ldots G_{m-1} B_{BG}(G_m^1 \otimes G_m^2 F). \end{array}$$

On définit ainsi deux opérations $\succ, \prec$ sur l'idéal d'augmentation $\mathbf{M}_{BG}$ de $\mathbf{H}_{BG}$.

Exemples



Théorème

- $(\mathbf{M}_{BG}, m, \succ, \prec)$ est librement engendrée comme algèbre bigreffe par $\bullet\,\bullet$.
- La composition $\circ$ de $\mathcal{BG}$ peut se définir récursivement en terme de forêts appartenant à $\mathbf{M}_{BG}$.

Exemples

Soient F_1, F_2, F_3 trois forêts appartenant à $\mathbf{M}_{BG}$.

$$\bullet\,\bullet \circ (F_1, F_2) = F_1 F_2$$

$$\circ (F_1, F_2) = F_1 \succ F_2$$

$$\circ (F_1, F_2) = F_1 \prec F_2$$

$$\circ (F_1, F_2, F_3) = F_1(F_2 \succ F_3)$$

$$\circ (F_1, F_2, F_3) = (F_1 \succ F_2) \prec F_3$$

$$\circ (F_1, F_2, F_3) = (F_1 \succ F_2) \succ F_3$$

Théorème

- L'opérade bigreffe duale $\mathcal{BG}^!$ de $\mathcal{BG}$ est l'opérade quadratique engendré par trois opérations binaires $m, \succ, \prec$ satisfaisant les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} \succ \circ(m, I) - \succ \circ(I, \succ), \\ m \circ (\succ, I) - \succ \circ(I, m), \\ \prec \circ(\prec, I) - \prec \circ(I, m), \\ \prec \circ(m, I) - m \circ (I, \prec), \\ \prec \circ(\succ, I) - \succ \circ(I, \prec), \\ m \circ (m, I) - m \circ (I, m), \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} \succ \circ(\succ, I), \\ \succ \circ(\prec, I), \\ m \circ (\prec, I), \\ \prec \circ(I, \prec), \\ \prec \circ(I, \succ), \\ m \circ (I, \succ). \end{array}\right.$$

- L'opérade bigreffe $\mathcal{BG}$ est Koszul.

Considérons le coproduit de déconcaténation sur $\mathbf{H}_{BG}$: si $F \in \mathbf{H}_{BG}$,

$$\Delta_{\mathcal{A}ss}(F) = \sum_{F_1 F_2 = F} F_1 \otimes F_2.$$

Proposition-Définition

$(\mathbf{M}_{BG}, m, \succ, \prec, \tilde{\Delta}_{\mathcal{A}ss})$ est une bialgèbre bigreffe infinitésimale, c'est-à-dire une famille $(A, m, \succ, \prec, \tilde{\Delta}_{\mathcal{A}ss})$ où $m, \succ, \prec : A \otimes A \to A$, $\tilde{\Delta}_{\mathcal{A}ss} : A \to A \otimes A$, avec les relations suivantes :

- $(A, m, \succ, \prec)$ est une algèbre bigreffe.
- Pour tout $x, y \in A$:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\Delta}_{\mathcal{A}ss}(xy) & = & (x \otimes 1)\tilde{\Delta}_{\mathcal{A}ss}(y) + \tilde{\Delta}_{\mathcal{A}ss}(x)(1 \otimes y) + x \otimes y, \\ \tilde{\Delta}_{\mathcal{A}ss}(x \succ y) & = & (x \otimes 1) \succ \tilde{\Delta}_{\mathcal{A}ss}(y), \\ \tilde{\Delta}_{\mathcal{A}ss}(x \prec y) & = & \tilde{\Delta}_{\mathcal{A}ss}(x) \prec (1 \otimes y). \end{array}$$

Proposition-Définition

Pour toute bialgèbre bigreffe infinitésimale, sa partie primitive est une $\mathcal{L}$-algèbre, c'est-à-dire une famille $(A, \succ, \prec)$ où $\succ, \prec: A \otimes A \to A$ vérifient la relation suivante : pour tout $x, y, z \in A$,

$$(x \succ y) \prec z = x \succ (y \prec z)$$

En particulier, la partie primitive $\mathbf{P}_{BG}$ de $\mathbf{M}_{BG}$ est une $\mathcal{L}$-algèbre. Plus précisément,

Théorème

$(\mathbf{P}_{BG}, \succ, \prec)$ est la $\mathcal{L}$-algèbre librement engendrée par . .

On a un foncteur naturel $(-)_{\mathcal{L}} : \{\mathcal{BG}-\mathrm{alg}\} \to \{\mathcal{L}-\mathrm{alg}\}$ associant à une $\mathcal{BG}$-algèbre $(A, m, \succ, \prec)$ la $\mathcal{L}$-algèbre $(A, \succ, \prec)$. On définit le foncteur adjoint algèbre bigreffe enveloppante universelle $U_{\mathcal{BG}}(A)$ d'une $\mathcal{L}$-algèbre $(A, \succ, \prec)$.

Théorème

Étant donné une bialgèbre bigreffe infinitésimale A, les assertions suivantes sont équivalentes :

- A est une bialgèbre bigreffe infinitésimale connexe,
- A est colibre parmi les coalgèbres connexes,
- A est isomorphe à $U_{\mathcal{BG}}(Prim(A))$ comme bialgèbre bigreffe infinitésimale.

En particulier, (voir [Lo])

Théorème

$(\mathcal{A}ss, \mathcal{BG}, \mathcal{L})$ est un bon triplet d'opérades.

- D. Calaque, K. Ebrahimi-Fard, and D. Manchon, *Two interacting Hopf algebras of trees*, Advances in Appl. Math. **47** (2011), 282-308, arXiv :0806.2238.
- A. Connes and D. Kreimer, *Hopf algebras, Renormalization and Noncommutative geometry*, Comm. Math. Phys **199** (1998), no. 1, 203-242, arXiv :hep-th/98 08042.
- Dotsenko V. and Khoroshkin A., *Gröbner bases for operads*, Duke Math. J. **153** (2010), no. 2, 363-396.
- J. Ecalle and B. Vallet, *The arborification-coarborification transform : analytic, combinatorial, and algebraic aspects*, Ann. Fac. Sc. Toulouse **13** (2004), 4, 575-657.
- Ginzburg V. and Kapranov M., *Koszul duality for operads*, Duke Math. J. **76** (1994), no. 1, 203-272, arXiv :0709.1228.
- M.E. Hoffman, *Quasi-shuffle products*, Journal of Algebraic Combinatorics **11** (2000), 49-68, arXiv :math/9907173.

- L. Foissy and J. Unterberger, *Ordered forests, permutations and iterated integrals* (2010), arXiv :1004.5208.
- Leroux P., *L-algebras, triplicial-algebras, within an equivalence of categories motivated by graphs*, Communications in Algebra **39** (2008), no. 8, 2661-2689, arXiv :0709.3453.
- Loday J.-L., *Generalized bialgebras and triples of operads*, Société Mathématiques de France, Astérisque (2008), no. 320.
- Menous F., *Random walks on* $\mathbb{R}$ *and ordered trees : First applications* (2002), Prépublication d'Orsay no. 2002-11, http ://www.math.u-psud.fr/ biblio/ppo/2002/ppo2002-11.html.
- J.-C. Novelli and J.-Y. Thibon, *Polynomial realizations of some trialgebras*, arXiv :math/0605061.