

Fonctions réelles d'une variable réelle**Rappels de cours**

- Définitions de bases sur les fonctions : domaine de définition, de continuité, de dérivabilité, parité, périodicité, fonction dérivée, tangentes, convexité, variations, limites, bijection et bijection réciproque, courbe représentative.

Savoir faire : Comment faire l'étude d'une fonction ?

- Théorème de la bijection. Bijection réciproque.

Savoir faire : Comment montrer qu'une fonction est bijective ? Comment déterminer sa bijection réciproque ?

- Définitions et propriétés des fonctions usuelles (partie entière, valeur absolue, exponentielle, logarithme, fonctions puissances, fonctions circulaires et circulaires réciproques, fonctions hyperboliques et hyperboliques réciproques).

- Continuité en un point, sur un intervalle.

Savoir faire : Comment prouver la continuité d'une fonction en un point ?

- Théorème des valeurs intermédiaires.

- Dérivabilité en un point, sur un intervalle. Lien entre continuité et dérivabilité.

Savoir faire : Comment prouver la dérivabilité d'une fonction en un point ?

- Théorème de Rolle, inégalités des accroissements finis.

- Fonctions convexes.

- Extension aux fonctions à valeurs complexes.

Fonctions usuelles

Exercice 1

Déterminer, pour chacune des fonctions suivantes, l'ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité puis calculer la fonction dérivée.

$$\begin{array}{llll}
 x \mapsto \frac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 7x + 6} & x \mapsto \sin(x^2 + 3) & x \mapsto \ln\left(\frac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 7x + 6}\right) & x \mapsto \frac{1 + 3\sin(x)}{1 + 2\cos(x)} \\
 x \mapsto \sqrt{2\sin(5x) + 7} & x \mapsto \ln(\ln(\ln(x))) & x \mapsto \sqrt{1 - x^2} \tan(4x) & x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{1 + x^2}\right) \\
 x \mapsto \sqrt{3 - \ln(x)} & x \mapsto \exp\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) & x \mapsto \ln(e^{2x} + e^x - 6) & x \mapsto x^x
 \end{array}$$

Exercice 2

Étudier la nature des branches infinies dans les cas suivants et donner une allure de leur tracé au voisinage de ∞ . Dans le cas où $\mathcal{C}_f$ admet une droite asymptote oblique, on précisera la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette asymptote au voisinage de ∞ .

1. $f(x) = \frac{3x^3 + 2x^2 + 5}{x^2 + x + 1}$ aux voisinages de $\pm\infty$.
 2. $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ aux voisinages de $\pm\infty$.
 3. $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 3}$ au voisinage de $+\infty$.
 4. $f(x) = x + \ln\left(\frac{3x + 1}{x + 2}\right)$ aux voisinages de $\pm\infty$.
 5. $f(x) = \frac{4e^x + x + 2}{e^x - 1}$ aux voisinages de $\pm\infty$.
-

Exercice 3

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{x - 1 + \ln(x)}{x^2}.$$

On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f .

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f . Est-ce que f est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_f$?
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Préciser si $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale ou horizontale.
3. On introduit la fonction auxiliaire g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^3 - x + 3 - 2\ln(x)$ et la fonction polynôme P définie par $P(x) = 3x^3 - x - 2$.
 - (a) Factoriser le polynôme P .
 - (b) En déduire le signe de P sur $\mathbb{R}$.
 - (c) Exprimer g' en fonction de P puis dresser le tableau de variation de g .
 - (d) Montrer que, pour tout $x > 0$, $g(x) > 0$.
4. Étude de f :
 - (a) Vérifier que la dérivée de f peut s'écrire, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, sous la forme : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.
 - (b) En déduire les variations de f .

(c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathcal{D}_f$, que l'on notera α .

Vérifier alors que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

5. Étude de l'asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$:

(a) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

(b) On pose, pour tout $x > 0$, $h(x) = x - 1 + \ln(x)$. Étudier les variations de h .

(c) Calculer $h(1)$. En déduire le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(d) En déduire le signe de $f(x) - (x + 1)$, puis la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de Δ .

6. Tracer $\mathcal{C}_f$ et Δ dans un même repère orthonormé.

Exercice 4

Résoudre les équations d'inconnue réelle x suivantes :

(a) $\sin(x) = \sin(2x)$

(b) $\cos(x) = \sin(3x)$

(c) $\cos(x) - \sin(x) = 1$

(d) $2 \cos^2(x) - \sin(x) = 1$

(e) $\cos^4(x) + \sin^4(x) = 1$

(f) $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$

Exercice 5

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(3\theta)$ et $\sin(7\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

2. Linéariser les polynômes trigonométriques suivants :

$$\sin^3(x); \quad \cos^5(x); \quad \sin(5x) \cos(6x); \quad \sin(5x) \cos(6x); \quad \cos^4(x) \sin^3(x).$$

Exercice 6

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.

2. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Exercice 7

1. Simplifier l'expression $\frac{\cos(p) - \cos(q)}{\sin(p) + \sin(q)}$.

2. En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

Exercice 8

Soit x un réel tel que $x \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. On pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Montrer que :

$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Exercice 9

Étudier les fonctions suivantes afin de tracer leurs courbes représentatives :

(a) $f(t) = \arcsin(\sin(t)) + \arccos(\cos(t))$

(b) $g(t) = \arccos\left(\sqrt{\frac{1 + \cos(t)}{2}}\right)$

Exercice 10

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \text{signe}(x) \times \frac{\pi}{2}.$$

2. Montrer que, pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\arctan(x+1) + \arctan(x-1) = \frac{\pi}{4}$.
 2. $\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$.
-

Exercice 12

1. On pose $A = \arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$.

- (a) Justifier que $\frac{3\pi}{4} < A < \frac{3\pi}{2}$.
- (b) Calculer $\tan(A)$.
- (c) En déduire A .

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\arctan(x-3) + \arctan(x) + \arctan(x+3) = \frac{5\pi}{4}.$$

Exercice 13

Justifier que, pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\frac{1}{2} \leq x^x(1-x)^{1-x}$$

Exercice 14

Montrer que :

$$(a) \forall x \geq 0, sh(x) \geq x \qquad (b) \forall x \in \mathbb{R}, ch(x) \geq 1 + \frac{1}{2}x^2$$

Exercice 15

1. Vérifier que, pour tout a réel, $sh(2a) = 2sh(a)ch(a)$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Exprimer à l'aide de la fonction sinus hyperbolique le produit

$$\prod_{k=1}^n ch\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

Exercice 16

1. Démontrer, en précisant le domaine de validité, la relation :

$$\tan(x) = \frac{1}{\tan(x)} - \frac{2}{\tan(2x)}.$$

2. En déduire la limite de la suite (S_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \tan\left(\frac{1}{2^k} \frac{\pi}{4}\right).$$

Exercice 17

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer $\arctan(k+1) - \arctan(k)$.
2. En déduire la limite de la suite (S_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n \arctan\left(\frac{1}{k^2 + k + 1}\right).$$

Exercice 18

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

1. $C_n = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \sin(kx)$.
 2. $C_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx)$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx)$.
 3. $C_n = \sum_{k=0}^n k \cos(kx)$ et $S_n = \sum_{k=0}^n k \sin(kx)$.
 4. $C_n = \sum_{k=0}^n ch(kx)$ et $S_n = \sum_{k=0}^n sh(kx)$.
-

Exercice 19

Soient f et g deux fonctions définies par $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ et $g(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f et le domaine de définition $\mathcal{D}_g$ de g .
 2. (a) Étudier les variations de f sur $]1, +\infty[$.
(b) En déduire que f réalise une bijection de $]1, +\infty[$ dans un intervalle à déterminer.
 3. (a) Étudier les variations de g sur $]0, +\infty[$.
(b) En déduire que g réalise une bijection de $]0, +\infty[$ dans un intervalle à déterminer.
 4. Démontrer que $g|_{]0, +\infty[}$ est la bijection réciproque de $f|_{]1, +\infty[}$.
Que peut-on en déduire sur les courbes représentatives de f et g ?
 5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f puis celle de g .
-

Exercice 20

Soit f une fonction définie par $f(x) = e^x - e^{-x}$.

1. Étudier les variations de f .
 2. En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle à déterminer.
 3. Déterminer l'expression de la bijection réciproque f^{-1} de f .
-

Exercice 21

1. Montrer que la fonction $x \mapsto th(x)$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I à préciser.
2. On note $argth$ sa bijection réciproque.

Montrer que $argth$ est dérivable sur I et exprimer sa dérivée.

3. En étudiant l'équation $y = th(x)$ d'inconnue x réelle, exprimer $argth(y)$ à l'aide des fonctions usuelles. Retrouver l'expression de sa dérivée.
-

Limites et continuité**Exercice 22**

Étudier les limites suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 (1) \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - e^x & (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x + 1} & (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-\sqrt{x}} \\
 (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos(e^x)}{x^2 + 1} & (5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} [x] & (6) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x \sin(x))
 \end{array}$$

Exercice 23

Étudier les limites suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 (1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} + \ln(x) & (2) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x}} & (3) \lim_{x \rightarrow 0^+} |\ln(x)|^{\frac{1}{\ln(x)}} \\
 (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} & (5) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin(\ln(x)) & (6) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} [x]
 \end{array}$$

Exercice 24

Étudier les limites suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 (1) \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x) \ln(\ln(x)) & (2) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin(2x)}{\pi - 2x} & (3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\ln(x)}
 \end{array}$$

Exercice 25

1. Montrer que :

(a) $\cos$ n'a pas de limite en $+\infty$.

(b) $\frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

2. Les fonctions suivantes ont-elles des limites en 0 ?

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a) } x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{(b) } x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{(c) } x \mapsto \cos(x) \cos\left(\frac{1}{x}\right)
 \end{array}$$

Exercice 26

Étudier la continuité des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= \begin{cases} \frac{1}{x^2+1} & \text{si } x < 0, \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases} & f_2(x) &= \begin{cases} 1-x & \text{si } x < 1, \\ \ln(x) & \text{si } x \geq 1. \end{cases} & f_3(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{\ln(x)}{x} & \text{si } x > 0. \end{cases} \\
 f_4(x) &= \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} & \text{si } x \neq 2, \\ 12 & \text{si } x = 2. \end{cases} & f_5(x) &= \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ \ln(x) & \text{si } x > 0. \end{cases} & f_6(x) &= \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Exercice 27

Déterminer l'ensemble de définition et de continuité des fonctions suivantes, puis chercher si elles admettent un prolongement par continuité aux bornes de leur ensemble de définition :

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= \ln(\ln(x)) & f_2(x) &= e^{-1/x^2} & f_3(x) &= \frac{2}{x-2} - \frac{3}{(x-2)^2} \\
 f_4(x) &= \frac{x^2}{|x|} & f_5(x) &= \ln(x)^{\ln(x)} & f_6(x) &= \frac{1}{e^{1/x} + 1} \\
 f_7(x) &= (x-1)^x & f_8(x) &= \frac{x \ln(x)}{x+1} & f_9(x) &= \frac{1}{\ln(x)}
 \end{aligned}$$

Exercice 28

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les réels a et b pour qu'elles soient continues :

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x > 0, \\ ax+b & \text{si } 0 \geq x \geq -1, \\ \frac{2+x}{x} & \text{si } -1 > x \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \ln(x) + a & \text{si } x \geq 1, \\ 1-x & \text{si } 1 > x \geq -1, \\ \frac{b}{x^2+x+1} & \text{si } -1 > x \end{cases}$$

Exercice 29

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer la continuité de la fonction $\sup(f, g)$ définie sur I par :

$$\sup(f, g)(x) = \max(f(x), g(x)).$$

Exercice 30

Donner un exemple :

1. de fonction continue sur $[0, +\infty[$ ni minorée, ni majorée.
 2. de fonction continue sur $]0, +\infty[$ sans limite en 0.
 3. de fonction définie sur $\mathbb{R}$ continue en aucun point.
-

Exercice 31

Montrer que la fonction $f(x) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} |\cos(p! \pi x)|^n \right)$ est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

Exercice 32

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer que si $f([a, b]) \subset [a, b]$ alors f admet un point fixe.
2. Montrer que si $[a, b] \subset f([a, b])$ alors f admet un point fixe.

Exercice 33

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$.

Montrer qu'il existe $x_1, x_2 \in [0, 1]$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$ et $x_1 - x_2 = \frac{1}{2}$.

Exercice 34

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout $x \in I$, $(f(x))^2 = 1$.

Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Exercice 35

Un randonneur parcourt 20 km en 5 heures.

1. Montrer qu'il existe un intervalle d'une heure pendant lequel il a fait exactement 4 km.
 2. Il prétend que, sur n'importe quel intervalle de 2 heures, il a parcouru 10 km. Est-ce possible ?
-

Exercice 36

Soit $f, g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ deux fonctions continues vérifiant $f \circ g = g \circ f$.

Montrer qu'il existe x_0 dans $[a, b]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 37

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x).$$

Exercice 38

Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 39

Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x)f(y).$$

Dérivabilité

Exercice 40

On considère les fonctions suivantes :

$$g(x) = \begin{cases} x \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad h(x) = \begin{cases} x^3 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Étudier la continuité et la dérivabilité des fonctions g et h .

Exercice 41

Pour quels $n \in \{0, 1, 2, 3\}$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est-elle continue, dérivable, de classe C^1 ?

Exercice 42

Soit $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que les dérivées n -ièmes des fonctions $\cos$ et $\sin$ s'expriment :

$$\frac{d^n}{dx^n}(\cos(x)) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \frac{d^n}{dx^n}(\sin(x)) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Exercice 43

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les dérivées n -ièmes des fonctions suivantes :

- | | | |
|--|-----------------------------|-------------------------------------|
| (a) $x \mapsto x^p$ (avec $p \in \mathbb{N}$) | (b) $x \mapsto \frac{1}{x}$ | (c) $x \mapsto (x^2 - x + 1)e^{-x}$ |
| (d) $x \mapsto \cos^3(x)$ | (e) $x \mapsto \cos(x)e^x$ | (f) $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}$ |
-

Exercice 44

Déterminer les points d'annulations de la dérivée n -ième de la fonction $\arctan$.

Exercice 45

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 46

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x > 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{sinon} \end{cases}$$

Peut-on déterminer a, b, c pour que f soit de classe C^2 ? de classe C^3 ?

Exercice 47

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application n fois dérivable. On suppose que f s'annule en au moins $n + 1$ points distincts de I .

Montrer que la dérivée n -ième de f s'annule au moins une sur I .

Exercice 48

Soit P un polynôme.

Montrer que l'équation $P(x) = \exp(x)$ n'admet qu'un nombre fini de solutions dans $\mathbb{R}$.

Exercice 49

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 50

Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. On suppose que la dérivée de g ne s'annule pas.

1. Montrer que $g(a) \neq g(b)$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Exercice 51

1. Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que $f(a) = g(a) = 0$. On suppose que, pour tout $x \in]a, b[$, $g(x) \neq 0$ et $g'(x) \neq 0$.

Montrer que, si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

2. Utiliser la question 1 pour calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3}$.

Exercice 52

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. On suppose que $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$. Montrer que la dérivée de f s'annule.
2. Plus généralement, on considère y un réel strictement compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$. Montrer que la dérivée de f prend la valeur y .

Exercice 53

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et dérivable. On suppose que la dérivée f' admet une limite ℓ en $+\infty$. Déterminer la valeur de celle-ci.

Exercice 54

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que f et f' admettent des limites finies en $+\infty$. Montrer que la limite de f' en $+\infty$ est nulle.

Exercice 55

1. Soient $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En utilisant la concavité de $\ln$, montrer que :

$$\forall u, v \geq 0, uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$

2. En déduire que :

$$\forall x, y > 0, \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

Exercice 56

Soit f une fonction convexe de classe C^1 sur un intervalle I . Montrer que f admet un minimum absolu en un point intérieur de I si et seulement si la dérivée de f s'annule en ce point.

Exercice 57

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et majorée sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est constante.
 2. Le résultat reste-t-il valable si on suppose seulement f définie, convexe et majorée sur $\mathbb{R}^+$?
-

Exercice 58

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Montrer que f est positive.
 2. On suppose que f présente une droite asymptote en $+\infty$. Étudier la position relative de la courbe représentative de f par rapport à son asymptote.
-