TD

Espaces affines: Barycentres et convexité

Dans tous les exercices, $\mathcal{E}$ désignera un $\mathbb{K}$-espace affine de dimension finie n, de direction E.

Barycentres

Exercice 1 Soient $\mathcal{E}$ un plan affine réel, A, B, C trois points de $\mathcal{E}$ non alignés, et $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$ tels que $\alpha + \beta + \gamma = 0$. On note $A' = bar((B, \beta), (C, \gamma))$, $B' = bar((C, \gamma), (A, \alpha))$ et $C' = bar((A, \alpha), (B, \beta))$.

1. Montrer que les points A', B', C' sont bien définis.
2. Montrer qu'on a $A \neq A', B \neq B'$ et $C \neq C'$, de sorte qu'on peut définir les droites $(AA'), (BB')$ et (CC').
3. Montrer que les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont parallèles.

Exercice 2 (Théorème de Thalès)

1. <u>En dimension 2</u>
   Supposons que $\mathcal{E}$ est un plan. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites de $\mathcal{E}$ sécantes en un point O. Soient $A, B \in \mathcal{D} \setminus \{O\}$ et $A', B' \in \mathcal{D}' \setminus \{O\}$.
   a) Montrer qu'on a $A \neq A'$ et $B \neq B'$.
   b) Montrer : $(AA')//(BB') \Longleftrightarrow \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}$.
2. <u>En dimension 3</u>
   Supposons $\mathcal{E}$ de dimension 3. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites non coplanaires de $\mathcal{E}$.
   a) On considère trois plans parallèles et deux à deux distincts qui coupent $\mathcal{D}$ respectivement en A, B, C et $\mathcal{D}'$ respectivement en A', B', C'.
   Montrer qu'on a $A \neq B$, $A' \neq B'$ puis : $\dfrac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$.
   b) Réciproquement, soient A, B, C (resp. A', B', C') trois points deux à deux distincts de $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{D}'$) tels que $\dfrac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$.
      i) Montrer qu'on a $A \neq A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$.
      ii) Montrer que $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BB'}$ ne sont pas colinéaires.
      iii) Montrer que les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont parallèles à un même plan.

Exercice 3 Soient $\mathcal{E}$ un plan affine réel, A, B, C trois points non alignés de $\mathcal{E}$, G le centre de gravité de ABC. Soient I, J, K, L, M, N les points de $\mathcal{E}$ définis par

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA},$$

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}.$$

Le but de cet exercice est de montrer de trois façons différentes que

$$G = mil[IL] = mil[JM] = mil[KN].$$

I. Première méthode (par les barycentres)
   1. Exprimer I, J, K, L, M, N comme barycentres de A, B, C.
   2. Utiliser la propriété d'associativité des barycentres pour en déduire le résultat.

II. Deuxième méthode (par les coordonnées cartésiennes)
On note $\mathcal{R} = (A, (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}))$.

1. Vérifier que $\mathcal{R}$ est un repère cartésien de $\mathcal{E}$.
2. Expliciter les coordonnées de $A, B, C, G, I, J, K, L, M, N$ dans $\mathcal{R}$ et conclure.

III. Troisième méthode (par les parallélogrammes et le théorème de Thalès)
Refaire un dessin propre pour cette question.

1. Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{ML} = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)$ et en déduire que $mil[IL] = mil[JM]$.
On note temporairement Ω ce point, et on appelle P le point d'intersection de $(A\Omega)$ et (BC).
2. À l'aide du théorème de Thalès, montrer que
$$\frac{\overline{J\Omega}}{\overline{BP}} = \frac{2}{3} = \frac{\overline{A\Omega}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{M\Omega}}{\overline{CP}}.$$
3. En déduire que $P = mil[BC]$ et que $\Omega = G$.
Ainsi $mil[IL] = mil[JM] = G$. On montrerait de même la dernière égalité cherchée (admis).

Exercice 4 (Médianes et bimédianes d'un tétraèdre non aplati)
Soit $ABCD$ un tétraèdre non aplati dans $\mathcal{E}$. On note G le centre de gravité de $ABCD$.

1. On note A', B', C' et D' les centres de gravité respectifs des triangles BCD, CDA, DAB et ABC.
   (a) Montrer qu'on a $A \neq A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$ et $D \neq D'$.
   Les droites (AA'), (BB'), (CC') et (DD') sont appelées les *médianes* de $ABCD$.
   (b) Montrer que G appartient aux quatre médianes.
   (c) Montrer qu'on a plus précisément : $(AA') \cap (BB') \cap (CC') \cap (DD') = \{G\}$.
   Ainsi on a démontré que *les médianes sont concourantes en* G.
   (d) Montrer qu'on a:
   $$\frac{\overline{AG}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{CC'}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{DD'}} = \frac{3}{4}.$$
   (e) Montrer qu'on a:
   $$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{0}.$$
2. On note $M = mil(A, B), N = mil(C, D), P = mil(A, C), Q = mil(B, D), R = mil(A, D)$ et $S = mil(B, C)$.
   (a) Montrer qu'on a $M \neq N$, $P \neq Q$ et $R \neq S$. Alors les droites (MN), (PQ) et (RS) sont appelées les *bimédianes* de $ABCD$.
   (b) Montrer que G appartient aux trois bimédianes de $ABCD$ et plus précisément qu'on a $G = mil(M, N) = mil(P, Q) = mil(R, S)$.

Exercice 5 (Théorème de Ménélaüs)
Soient $\mathcal{E}$ un plan affine et ABC un triangle non aplati dans $\mathcal{E}$. Soient $P \in (BC) \setminus \{B, C\}$, $Q \in (CA) \setminus \{C, A\}$ et $R \in (AB) \setminus \{A, B\}$.

1. Montrer que les points P, Q et R sont deux à deux distincts.
2. (a) Calculer les coordonnées barycentriques de P, Q, R dans le repère affine (A, B, C).
   (b) Montrer que
   $$P, Q, R \text{ sont alignés} \Longleftrightarrow \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1.$$

Exercice 6 (Théorème de Céva)
Soit $\mathcal{E}$ un *plan* affine. Soient A, B, C trois points *non alignés* de $\mathcal{E}$.
Soient A', B', C' trois points de $\mathcal{E}$ tels que $A' \in (BC) \setminus \{B, C\}$, $B' \in (CA) \setminus \{C, A\}$, $C' \in (AB) \setminus \{A, B\}$.
On pose :

$$\rho = \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \times \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \times \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}.$$

Le but de l'exercice est de démontrer le **théorème de Céva : Les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes si et seulement si $\rho = -1$.**

I. Questions préliminaires

1. Vérifier que ρ est bien défini.
2. Justifier le fait que $\mathcal{A} = (A, B, C)$ est un repère affine de $\mathcal{E}$.
3. Etablir que $A \neq A'$, $B \neq B'$ et $C \neq C'$.
4. Rappeler l'énoncé du théorème de Thalès plan.
   Utiliser ce résultat pour prouver que :

$$(AA') \parallel (BB') \Longleftrightarrow \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} = \frac{\overline{BA'}}{\overline{BC}}.$$

   On admettra que, de la même façon, on a :

$$(AA') \parallel (CC') \Longleftrightarrow \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AB}} \quad \text{et} \quad (BB') \parallel (CC') \Longleftrightarrow \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} = \frac{\overline{CB'}}{\overline{CA}}.$$

II. **On suppose (AA') et (BB') parallèles.**

1. Montrer que $\rho = \frac{\overline{CA'}}{\overline{BC}} \times \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}$ puis $\rho = \frac{\overline{CA}}{\overline{B'C}} \times \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}$.
2. En déduire que (CC') est parallèle à (BB') (et donc à (AA')) si et seulement si $\rho = -1$.

III. **On suppose que (AA') et (BB') sont sécantes** en un point I, de coordonnées barycentriques (α, β, γ) dans le repère $\mathcal{A}$.

1. Vérifier que $I \notin (AB) \bigcup (BC) \bigcup (AC)$. Que peut-on en déduire sur α, β, γ ?
2. Etablir l'une des trois égalités suivantes (les deux autres seront admises) :

$$\left(\gamma + \beta \frac{\overline{BA'}}{\overline{CA'}}\right) \overrightarrow{CA'} + \alpha \overrightarrow{AI} + (\beta + \gamma) \overrightarrow{A'I} = \overrightarrow{0},$$

$$\left(\alpha + \gamma \frac{\overline{CB'}}{\overline{AB'}}\right) \overrightarrow{AB'} + \beta \overrightarrow{BI} + (\alpha + \gamma) \overrightarrow{B'I} = \overrightarrow{0},$$

$$\left(\beta + \alpha \frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}}\right) \overrightarrow{BC'} + \gamma \overrightarrow{CI} + (\alpha + \beta) \overrightarrow{C'I} = \overrightarrow{0}.$$

3. En déduire que $\frac{\gamma}{\beta} = -\frac{\overline{BA'}}{\overline{CA'}}$ et $\frac{\alpha}{\gamma} = -\frac{\overline{CB'}}{\overline{AB'}}$.
4. Prouver que

$$I \in (CC') \Longleftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = -\frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}} \Longleftrightarrow \rho = -1.$$

IV. Conclure.

Convexité

On suppose dans les exercices qui suivent que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Exercice 7 Soient X, Y deux parties convexes de E. On pose $Z = \{mil[AB]; (A, B) \in (X, Y)\}$. Montrer que Z est convexe.

Exercice 8 (Enveloppes convexes)
Soit A, B et C trois points de $\mathcal{E}$ distincts.

1. Quelle est l'enveloppe convexe de $\{A, B\}$? De $\{A, B, C\}$?

2. Montrer que $\text{Conv}(A, B, C) = \bigcup_{M \in [BC]} [AM]$. On pensera à faire un dessin.

Exercice 9 (Points extrémaux d'un convexe) Soient $\mathcal{E}$ un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension $n \geq 1$, X une partie convexe de $\mathcal{E}$.

On dit qu'un point I de X est *extrémal dans* X si pour tous points $M, N \in X$ tels que $I = mil(M, N)$, on a $M = I = N$.

Soit $P \in X$ fixé.

1. On suppose que P est extrémal dans X.
   Soient $M, N \in X$ et $\lambda \in]0, 1[$ tels que $P = bar((M, 1 - \lambda), (N, \lambda))$.
   a) On suppose $\lambda < \frac{1}{2}$. On note $Q = bar((M, 1 - 2\lambda), (N, 2\lambda))$.
      Montrer que $P = mil(M, Q)$ et en déduire que $M = P = Q$, puis que $M = P = N$.
   b) On suppose $\lambda > \frac{1}{2}$. On note $Q = bar((M, 2 - 2\lambda), (N, 2\lambda - 1))$.
      Montrer que $P = mil(N, Q)$ et en déduire que $N = P = Q$, puis que $M = P = N$.

2. On suppose que pour tous $M, N \in X$ et tout $\lambda \in]0, 1[$ tels que $P = bar((M, 1 - \lambda), (N, \lambda))$, on a $M = P = N$. Montrer que $X \setminus \{P\}$ est convexe.

3. On suppose que $X \setminus \{P\}$ est convexe. Montrer que P est extrémal dans X.

On a ainsi montré que les assertions suivantes sont équivalentes :

- P est extrémal dans X
- pour tous $M, N \in X$ et tout $\lambda \in]0, 1[$ tels que $P = bar((M, 1 - \lambda), (N, \lambda))$, on a $M = P = N$
- $X \setminus \{P\}$ est convexe.

Exercice 10 (Théorème de Lucas)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré au moins 2. Le but de l'exercice est de démontrer que les points M' d'affixe les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des points M d'affixe les racines de P.

1. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, ..., a_k) \in \mathbb{C}^k$ et $(\alpha_1, ..., \alpha_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$ tels que :
$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \frac{\alpha_1}{X - a_1} + ... + \frac{\alpha_k}{X - a_k}.$$

2. Soit z une racine de P' qui ne soit pas racine de P. On note Z le point d'affixe z, et pour tout $1 \leq j \leq k$, A_j le point d'affixe a_j.
   Montrer grâce à l'égalité ci-dessus que le point Z est barycentre des points A_1, ..., A_k affectés de masses positives à déterminer.

3. Conclure.

4. Application : utilisez le résultat démontré ci-dessus sur le polynôme $X^3 - X^2 + X - 1$.

Exercice 11 (Théorème de Caratheodory)

1. Soit $\mathcal{A} = (A_0, ..., A_{n+1})$ une famille de $n + 2$ points distincts de $\mathcal{E}$ et M une combinaison convexe de ces points. Montrer qu'il existe une famille $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ de cardinal au plus $n + 1$ telle que M soit une combinaison convexe des points de $\mathcal{B}$.

2. Soit $\mathcal{P}$ une partie d'un espace affine de dimension n. Montrer que tout point de l'enveloppe convexe de $\mathcal{P}$ est combinaison convexe d'au plus $n + 1$ points de $\mathcal{P}$.