EXERCICES DU CHAPITRE 5

Faculté des Sciences Reims

UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE-ARDENNE

Exercice 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, chacun des systèmes suivants. On utilisera la méthode du pivot de Gauss et on écrira explicitement l'ensemble solution.

$$(S_1)\begin{cases}-6x-5y-6z=1\\5x+4y+5z=-1\\x+2y+2z=-2\end{cases}\qquad(S_2)\begin{cases}2x-y+4z=-2\\-x+2y-3z=-3\\x+4y-z=1\end{cases}\qquad(S_3)\begin{cases}2x-y+4z=-1\\-x+2y-3z=1\\x+4y-z=1\end{cases}$$

$$(S_4)\begin{cases}x-3y+2z=1\\-x+2y-z=-1\end{cases}\quad(S_5)\begin{cases}x+2y+2z=2\\3x+y-2z=1\\4x-3y-z=3\\2x+4y+2z=4\end{cases}\quad(S_6)\begin{cases}-3x+y=-1\\x-y+z=0\\-3x-z=1\\-4x-z=1\end{cases}\quad(S_7)\begin{cases}-3x+y=-1\\x-y+z=4\\-3x-z=-2\\-4x-z=1\end{cases}$$

$$(S_8)\begin{cases}x+y-2z+t+3u=1\\2x-y+2z+2t+6u=2\\3x+2y-4z-3t-9u=3\end{cases}\qquad(S_9)\begin{cases}x+y+2z+t=5\\2x+3y-z-2t=2\\4x+5y+z=7\end{cases}$$

Exercice 2 :

Pour chacun des systèmes suivants :

$$(S_1)\begin{cases}5x-3y-4z=a\\-x+4y-4z=b\\-4x+4y+z=c\end{cases}\qquad(S_2)\begin{cases}x+2y-3z=a\\3x-y+2z=b\\x-5y+8z=c\end{cases}\qquad(S_3)\begin{cases}x+2y-3z=a\\2x+6y-11z=b\\x-2y+7z=c\end{cases}$$

d'inconnues $x,y,z\in\mathbb{R}$ et de paramètres $a,b,c\in\mathbb{R}$, déterminer les éventuels triplets $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ pour lesquels :

a) Le système est incompatible.

b) Le système est compatible.

c) Le système est de Cramer.

On ne demande pas de calculer les éventuelles solutions.

Exercice 3 :

Soient les couples de réels (x_i,y_i) $(0\leqslant i\leqslant 3)$ suivants :

$$(x_0,y_0)=(0,1)\qquad(x_1,y_1)=(1,5)\qquad(x_2,y_2)=(2,31)\qquad(x_3,y_3)=(-1,1)$$

Montrer qu'il existe une et une seule fonction polynomiale f de degré 3, telle que : $\forall i\in\{0,1,2,3\},\ f(x_i)=y_i$

Déterminer cette fonction polynôme.

Exercice 4 :

1) Soient les trois matrices A, B et C à coefficients réels définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Calculer $3A$ et $B - 2C$.

b) Calculer AB et AC. Que peut-on remarquer ?

c) Calculer A^2.

2) Soient les trois matrices A, B et $C \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculer AB, BA, AC et CA. Remarques ?

Exercice 5 :

On considère les quatre matrices A, B, C et D à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Énumérer les produits de 2 ou 3 de ces matrices qui sont définis et les calculer.

Exercice 6 :

1) Déterminer l'inverse des matrices suivantes, quand cette matrice inverse existe :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \\ -2 & -3 & -7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2) Calculer l'inverse de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 7 :

On note A la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Vérifier que $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

2) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $M_n = A^n + A - 2I_3$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   a) $A^{n+2} - 2A^{n+1} = A^{n+1} - 2A^n$

   b) $A^{n+2} = 2A^{n+1} + A - 2I_3$

   c) $M_{n+2} = 2M_{n+1}$

   Calculer alors M_n, puis en déduire A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 :

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et A et B des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$ et $B^2 = B$.

1) On suppose que l'on a $AB = -BA$. Montrer que l'on a $AB = -ABA$, puis $AB = BA$. En déduire les égalités $AB = BA = 0$.

2) Démontrer l'équivalence suivante : $(A+B)^2 = A + B \iff AB = BA = 0$.

3) Trouver un couple (U, V) de matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $U \neq 0$, $V \neq 0$, $U^2 = U$, $V^2 = V$ et $UV = VU = 0$.

Exercice 9 :

On considère les matrices carrées réelles d'ordre 3 suivantes : $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

1) Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}.

2) On pose : $D = P^{-1}AP$

   a) Calculer D. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, D^n.

   b) Montrer par récurrence sur l'entier n, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $A^n = PD^nP^{-1}$.

   c) En déduire une formule donnant A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 10 :

1) a) Trouver deux matrices A et B de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et A et B deux matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$. On suppose que $AB = BA$.

i) Montrer que • Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$: $A^k B = B A^k$.

• Pour tous entiers $k, \ell \in \mathbb{N}$: $A^k B^\ell = B^\ell A^k$.

ii) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a l'égalité : $(A+B)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$

2) Application : Soit M la matrice définie par : $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Soit J la matrice carrée d'ordre 3 définie par : $J = M - I_3$.

• Calculer J, J^2 et J^3.

• En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, J^k.

• A l'aide de la formule de la question 1), calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11 :

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^p = 0$ (où p et n sont deux entiers naturels non nuls).On pose $M = I_n - A$.

Montrer que M est inversible et que $M^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} A^k$

2) Applications : Utiliser la question 1) pour calculer l'inverse des matrices suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(Indication pour l'inverse de M_3 : on pourra commencer par appliquer la question 1) à $\frac{1}{2} M_3$)

Exercice 12 :

Soient a, b, c et m des nombres réels. On considère le système d'équations linéaires :

$$(\star) \begin{cases} x - y + 2z = a \\ m\,x + (1-m)\,y + 2(m-1)\,z = b \\ 2\,x + m\,y - (3m+1)\,z = c \end{cases}$$

1) On suppose $m = -1$. Montrer qu'il existe des nombres réels x, y et z vérifiant le système $(\star)$ si et seulement si $c = 3a + b$.

2) On suppose $m = -1$ et $c = 3a + b$. Trouver une solution du système $(\star)$ et montrer que le système a une infinité de solutions.

3) On suppose $m \neq -1$. Montrer que le système $(\star)$ a une unique solution. La calculer.

4) Pour quelles valeurs de m la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ m & 1-m & 2m-2 \\ 2 & m & -3m-1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Dans ce cas calculer son inverse.

Exercice 13 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, en discutant suivant les valeurs du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, les systèmes :

$$(S_1)\begin{cases} x + y + \alpha z = 2 \\ 3x + 4y + 2z = \alpha \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + \alpha z = 3 \\ x + \alpha y + 3z = 2 \end{cases} \qquad (S_3)\begin{cases} x + 2y + \alpha z = 1 \\ 2x + \alpha y + 8z = 3 \end{cases}$$

$$(S_4)\begin{cases} x + \alpha y + \alpha z = 1 \\ \alpha x + y + \alpha z = 1 \\ \alpha x + \alpha y + z = 1 \end{cases} \qquad (S_5)\begin{cases} x - \alpha y + \alpha^2 z = \alpha \\ \alpha x - \alpha^2 y + \alpha z = 1 \\ \alpha x + y - \alpha^3 z = 1 \end{cases}$$

****

Exercices supplémentaires

Extrait du DS N^{0}1 de Ma0101 (2008-2009)

Exercice 1 :

On considère la matrice A (à coefficients réels) définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Vérifier que A est inversible et calculer son inverse.

2) Calculer et simplifier $A^3 - 4A^2 - 6A$. En déduire une expression de A^{-1} en fonction de A et I_3.

Exercice 2 :

On considère le système d'équations linéaires (S) :

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + my + (2m-5)z = 3 \\ x + my + (3m-7)z = 4 \end{cases}$$

de paramètre $m \in \mathbb{R}$. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre m :

a) (S) est incompatible.

b) (S) est indéterminé.

c) (S) est de Cramer.

Dans les cas où le système est compatible, on déterminera la (ou les) solution(s) de (S).

Extrait du DS N^{0}1 de Ma0101 (2009-2010)

Exercice 1 :

On considère le système d'équations linéaires (S) :

$$\begin{cases} x + (m-1)\,y - z = 1 \\ x + (3m+1)\,y + z = 4m+7 \\ x + 2m\,y + m\,z = m^2+3m+4 \end{cases}$$

de paramètre $m \in \mathbb{R}$. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre m :

a) (S) est incompatible.

b) (S) est indéterminé.

c) (S) est de Cramer.

Dans les cas où le système est compatible, on déterminera la (ou les) solution(s) de (S).

Exercice 2 :

On considère la matrice A (à coefficients réels) définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Est-ce que A est inversible ? Si oui, calculer son inverse.

FIN